مقدمه

جزوه حاضر به منظور دوره کلی و مرور جامع مطالب اصلی درس ریاضی دو آماده شده است.

از آنجاکه هدف این مجموعه ایجاد توانایی برای پاسخگویی به بیش از ۸۰٪ سوالات مطرح شده در آزمون این درس می‌باشد، پیشنهاد می‌شود:

در درس ریاضی دو به مباحث زیر کاملاً مسلط باشید.

۱. **در بحث توابع دو متغیره (به طور متوسط ۱۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ حد توابع با تأکید بر استفاده از مختصات قطبی و در صورت نیاز یافتن مسیرهایی که جواب حد وابسته به مسیر می‌شود.

ب ـ قواعد مشتق‌گیری زنجیره‌ای ـ ضمنی

ج ـ دیفرانسیل کامل و استفاده از آن در محاسبه مقدار تقریبی توابع

د ـ قضیه‌های اویلر در توابع همگن

و ـ ژاکوبین و مساله حذف تابع اختیاری

۲. **در بحث میدان‌های برداری (به طور متوسط ۱۰٪ از کل سوالات)**

روابط مربوط به بردارهای یکه مماس و قائم نوع اول و دوم و نیز روابط مربوط به یافتن انحناء و تاب

۳. **در بحث اپراتور برداری نابلا (به طور متوسط ۱۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ استفاده از گرادیان به عنوان بردار عمود بر سطح رویه و مسایل مربوط به آن

ب ـ استفاده از گرادیان به عنوان تغییرات جهتی و مسایل مربوط به آن

۴. **در بحث مسایل اکسترمم (به طور متوسط ۱۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ یافتن اکسترمم‌های نسبی با توجه به تعریف Δ

ب ـ یافتن اکسترمم‌های مطلق در نواحی

ج ـ یافتن اکسترمم‌های مشروط با تأکید بر روش لاگرانژ

۵. **در بحث انتگرال‌های دو گانه (به طور متوسط ۲۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ تغییر ترتیب انتگرال‌گیری

ب ـ تغییر متغیر در انتگرال دوگانه در مسایلی که تابع زیر علامت انتگرال و یا میدان انتگرال‌گیری پیچیده است

ج ـ استفاده از مختصات قطبی

۶. **در بحث انتگرال‌های منحنی‌الخط (به طور متوسط ۲۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ روش‌های محاسبه المان طول قوس و استفاده از آن ها برای محاسبه طول یک منحنی و محاسبه سطح حاصل از دوران یک منحنی حول محورهای مختصات

ب ـ ساختار کلی انتگرال‌های منحنی‌الخط نوع دوم و توجه به

A) روش محاسبه مستقیم

B) شرایط مستقل از مسیر بودن انتگرال و استفاده از تابع پتانسیل و یا مسیرهای جایگزین ساده‌تر

C) استفاده از قضیه گرین (حالت دوبعدی) در صورت بسته بودن مسیر و استفاده از قضیه استوکس (حالت سه بعدی) در صورت بسته بودن مسیر

۷. **در بحث انتگرال‌های سه‌گانه (به طور متوسط ۱۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ نوشتن حدود در مختصات دکارتی با تأکید بر عدم نیاز به ترسیم ناحیه سه بعدی و فقط ترسیم تصویر ناحیه روی یکی از صفحات مختصات

ب ـ توجه به نوع رویه‌های داده شده وتابع زیر علامت انتگرال برای انتخاب یکی از دستگاه‌های مختصات استوانه‌ای و کروی با تأکید بر نوشتن حدود انتگرال‌ها

۸. **در بحث انتگرال‌های منحنی‌السطح (به طور متوسط ۱۰٪ از کل سوالات)**

الف ـ روش محاسبه المان سطح و استفاده از آن برای محاسبه مساحت یک رویه

ب ـ ساختار کلی انتگرال‌های منحنی‌السطح نوع دوم و توجه به

A) روش محاسبه مستقیم

B) استفاده از قضیه دیورژانس در صورت بسته بودن سطح

ارادتمند شما

محمدصادق معتقدی

حد و پیوستگی در توابع دو متغیره

می گوئیم $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L$ هرگاه بتوان استلزام منطقی زیر را نشان داد:

$$\forall \beta>0 \quad , \quad \exists \alpha>0 ; \qquad 0<\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}<\alpha \quad \rightarrow \quad \left|f(x,y)-L\right|<\beta$$

و می‌گوئیم تابع $f(x,y)$ در نقطه $\left(x_0 , y_0\right)$ پیوسته است، هرگاه:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f\left(x_0,y_0\right)$$

توجه:

معمولاً علاقه‌مندیم وجود یا عدم موجود بودن یک حد دو متغیره در نقطه‌ای خاص را بدون ارجاع به برقراری استلزام منطقی فوق بررسی کنیم. به خصوص از آنجا که (حاصل حد یک تابع دو متغیره در صورت وجود یکتا می‌باشد)، اگر بتوانیم نشان دهیم $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ به ازاء لااقل دو طریق نزدیک شدن به نقطه $\left(x_0 , y_0\right)$ به دو جواب متفاوت منجر می‌شود، عدم موجود بودن حد مذکور ثابت شده است.

دقت داریم برای میل کردن به نقطه $\left(x_0 , y_0\right)$ بیشمار مسیر و طریق مختلف وجود دارد و البته اگر حد مورد بحث به ازاء تعدادی از این مسیرها به جواب یکسانی منجر شد، اثباتی برای وجود حد مذکور صورت نپذیرفته است.

نکته ۱ : ممکن است برای نزدیک شدن به نقطه $\left(x_0 , y_0\right)$ دو مسیر خاص:

الف) روی خط $x=x_0$ قرار بگیریم و y را به y_0 میل دهیم.

ب) روی خط $y=y_0$ قرار بگیریم و x را به x_0 میل دهیم.

مدنظر قرار گیرد (تغییر ترتیب میل دادن متغیرها)، اگر دو جواب متفاوت برای حد مورد بحث به‌دست آمد، به معنای عدم موجود بودن آن حد خواهد شد (و نه چیز دیگر!).

نکته ۲ : بسیاری مواقع در تحلیل حدهای دو متغیره برای حالت $(0,0) \rightarrow (x,y)$ که به ابهام $\frac{0}{0}$ انجامیده‌اند، استفاده از تغییر متغیرهای $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ و رفتن به مختصات قطبی می‌تواند برای ارزیابی حد مورد بحث مناسب باشد. طبیعتاً در این حالت $r\to 0$ و البته θ مقداری دلخواه می‌تواند باشد.

بدیهی است اگر جواب به θ وابسته نشد و به جواب مشخص رسید، حاصل حد مورد نظر را یافته‌ایم و اگر جواب وابسته به θ بود، عدم موجود بودن آن حد ثابت می‌شود و اگر به ازاء θ ای حاصل کار به ابهام رسید، نیاز به بررسی‌های دیگر داریم.

نکته ۳ : بسیاری مواقع در تحلیل حدهای دو متغیره برای حالت $(0,0) \rightarrow (x,y)$ که به ابهام $\frac{0}{0}$ انجامیده‌اند،با استفاده از مسیرهایی با جنس $y=mx^{\alpha}$ یا $y=nx^{\beta}-mx^{\alpha}$ که به ازاء مقادیر خاصی از β و α می‌توان وابسته بودن جواب به m یا n را نشان داده و عدم موجود بودن حد مورد بحث را نشان داد .

مثال : حاصل حدهای زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

$$\text{۱)}\ I=\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{3x+y-7}{x+2y-4}\quad\to\quad I=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم})$$

حل : تغییر ترتیب میل دادن متغیرها:

$$(x=2)\ \to\ \lim_{y\to1}\frac{6+y-7}{2+2y-4}=\lim_{y\to1}\frac{y-1}{2y-2}=\frac{0}{0}\ \xrightarrow{H}\ \frac{1}{2}$$

$$(y=1)\ \to\ \lim_{x\to2}\frac{3x+1-7}{x+2-4}=\lim_{x\to2}\frac{3x-6}{x-2}=\frac{0}{0}\ \xrightarrow{H}\ 3$$

از آنجا که به دو جواب متفاوت رسید حد مورد نظرمان موجود نمی‌باشد.

$$\text{۲)}\ I=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xye^{x+y}}{x^2+y^2}\quad\to\quad I=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم})$$

حل : بررسی کنید که تغییر در ترتیب میل دادن متغیرها به $(0,0)$ تغییری در جواب ایجاد نمی‌کند و در هر دو حالت به صفر می‌رسیم. لذا فعلاً نتیجه‌ای راجع به وجود حد نمی‌توان گرفت، جز آن که اگر حد موجود باشد، برابر صفر است.

در مختصات قطبی داریم:

$$I=\lim_{r\to0,\ \forall\theta}\frac{r\cos\theta\, r\sin\theta\,.\,e^{r\cos\theta+r\sin\theta}}{r^2}=\lim_{r\to0,\ \forall\theta}\cos\theta\sin\theta\, e^{r(\cos\theta+\sin\theta)}=\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot e^0$$

و چون عبارت $\cos\theta\cdot\sin\theta$ وابسته به θ است . پس حد مورد نظر موجود نمی‌باشد.

$$\text{۳)}\ I=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3}{x+y}\quad\to\quad I=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم})$$

حل : تغییر در ترتیب تغییر میل کردن متغیرها در جواب ما تغییری حاصل نمی‌کند.

با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$I=\lim\frac{r^3\cos^3\theta}{r\cos\theta+r\sin\theta}$$

عبارت $\frac{\cos^3\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$ وابسته به θ است، ولی به ازاء همه مقادیر θ کراندار باقی نمی‌ماند.

$$I=\lim_{r\to0,\ \forall\theta}r^2\frac{\cos^3\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

به ازای $\theta=\frac{-\pi}{4}$ به ابهام می‌رسیم، لذا استفاده از مختصات قطبی نمی‌تواند به طور صریح در ارزیابی وجود حد مورد نظر کمک نماید.

حال اگر از طریق مسیرهای $y=-x+mx^3$ که البته همگی از $(0,0)$ می‌گذرد، به بررسی حدمان بپردازیم، داریم:

$$I=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-x+mx^3}=\frac{1}{m}\quad(\text{وابسته به } m)$$

پس حد مورد نظر موجود نمی‌باشد.

$$\text{۴)}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^4}{x^2+y^8}\quad\to\quad I=\frac{0}{0}\ (\text{مبهم})$$

حل : بررسی کنید مختصات قطبی چرا به تحلیل مساله کمک مستقیم نمی‌کند.اگر روی مسیرهای $x=my^4$ که البته از مبدأ می‌گذرند به بررسی بپردازیم، داریم:

$$I=\lim_{y\to0}\frac{my^4\,.\,y^4}{(my^4)^2+y^8}=\frac{m}{m^2+1}\quad(\text{وابسته به } m)$$

پس حد موجود نمی‌باشد.

مشتقات جزئی در توابع دو متغیره

برای تابع $z = f(x, y)$ اگر چه معنای عباراتی نظیر $\frac{\partial z}{\partial x}$ یا $\frac{\partial z}{\partial y}$ یا ... مشخص است، اما در بیان ریاضی داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(x + \Delta x, y) - f_y(x, y)}{\Delta x}$$

قضیه : هرگاه z و مشتقات جزئی آن توابعی پیوسته باشند، داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x - y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مطلوبست محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

حل : از آنجائی که عبارت $\frac{x^2 + y^2}{x - y^2}$ به خودی خود در $(0, 0)$ تعریف شده نمی‌باشد، لذا مجاز نیستیم از این عبارت مشتق نسبت به x گرفته و حد حاصل کار را در نقطه $(0, 0)$ محاسبه کرده و آن را به عنوان $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ گزارش کنیم.

با استفاده از تعریف داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \to$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{(\Delta x)^2 + (0)^2}{(\Delta x) - (0)^2}}{\Delta x} = 1$$

توضیح اضافه:

مشاهده می‌شود:

$$\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{x - y^2}$$

موجود نیست (با تغییر ترتیب میل دادن متغیرها به دو جواب متفاوت می‌رسیم). پس $f(x, y)$ در $(0, 0)$ حد ندارد و پیوسته نیست، ولی دیدیم $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ موجود است.

مثال : فرض کنید داشته باشیم:

$$z = y^2 f(xy)$$

مطلوبست محاسبه $I = x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

حل : با فرض:

$$u = xy$$

$$z = y^2 f(u) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = y^2 f'(u) \cdot y \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2yf(u) + y^2 \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2yf(u) + y^2 \dfrac{df}{du} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2yf(u) + y^2 f'(u) \cdot x \end{cases}$$

حال مشاهده می‌شود:

$$I = x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(y^3 f'\right) - y\left(2yf + xy^2 f'\right) = -2y^2 f = -2z$$

✓ مساله حذف تابع اختیاری

فرض کنید داشته باشیم:

$$F(u(x,y,z),\ v(x,y,z)) = 0 \quad \text{یا} \quad u(x,y,z) = F(v(x,y,z))$$

که در آن v و u توابعی مشخص شده و z تابعی از دو متغیر مستقل x , y می‌باشد.

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر z (حاصل از حذف تابع اختیاری F)، به صورت روبرو قابل حصول است:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم:

$$F\left(x^2 + 3y,\ yz\right) = 0$$

مطلوبست محاسبه $I = 3y\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

حل : داریم:

$$u = x^2 + 3y \qquad , \qquad v = yz$$

لذا باید داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2x & 3 \\ y\dfrac{\partial z}{\partial x} & z + y\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right) - 3y\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \rightarrow$$

$$2xz = 3y\frac{\partial z}{\partial x} - 2xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

✓ دیفرانسیل کامل توابع دو متغیره

برای تابع دو متغیره $z = f(x, y)$، دیفرانسیل کامل مرتبه nام به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z$$

مثلاً داریم:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} dx \, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

توجه ۱ : شرط لازم و کافی برای آن‌که عبارت $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ یک دیفرانسیل کامل باشد یعنی بتوان تابعی مانند $u(x, y)$ یافت به طوری که $du = P dx + Q dy$، آن است که: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

توجه ۲ : dz مبین کل تغییرات تابع z به ازاء تغییرات متغیرهای y , x به اندازه dx و dy می‌باشد.

توجه ۳ : دیفرانسیل کامل از مرتبه nام تابع سه متغیره $w = f(x, y, z)$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$d^n w = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^n w$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم:

$$f(x, y) = \int_{x^2}^{xy^2} \sqrt{t^2 + t}\; dt$$

مقدار تقریبی برای $f(1.1, 0.98)$ پیدا کنید.

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \sqrt{\left(xy^2\right)^2 + \left(xy^2\right)} - 2x\sqrt{\left(x^2\right)^2 + \left(x^2\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,xy\sqrt{\left(xy^2\right)^2 + \left(xy^2\right)} - 0$$

می‌دانیم:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

به ازاء $y = 1$, $x = 1$, $dy = -\frac{2}{100}$, $dx = \frac{1}{10}$ بدست می آید :

$$df = \left(1\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{10}\right) + \left(2\sqrt{2}\right)\left(-\frac{2}{100}\right) = -\frac{10\sqrt{2}}{100} - \frac{4\sqrt{2}}{100} = -\frac{14\sqrt{2}}{100}$$

حال می‌گوییم:

$$f(1.1, 0.98) \simeq f(1, 1) + df = \int_1^1 \cdots + \frac{-14\sqrt{2}}{100} \quad \rightarrow \quad f(1.1, 0.98) = \frac{-14\sqrt{2}}{100}$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم:

$$z = x^3 + y^2 \quad , \quad f(x, y, z) = 0$$

مطلوبست محاسبه $\frac{dz}{dx}$.(جواب می‌تواند برحسب مخلوطی از x, y, z و مشتقات جزئی f نسبت به این متغیرها باشد.)

حل :

$$z = x^3 + y^2 \quad \rightarrow \quad dz = 3x^2\,dx + 2y\,dy \qquad (\mathrm{I})$$

$$f(x, y, z) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

از (I) داریم:

$$dy = \frac{dz - 3x^2\,dx}{2y}$$

و با قرار دادن این عبارت در II داریم:

$$f_x\,dx + f_y\left(\frac{dz - 3x^2\,dx}{2y}\right) + f_z\,dz = 0 \quad \rightarrow \quad dz\left(\frac{1}{2y}f_y + f_z\right) = dx\left(\frac{3x^2}{2y}f_y - f_x\right) \quad \rightarrow$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{3x^2}{2y}f_y - f_x}{\frac{f_y}{2y} + f_z}$$

✓ قاعده مشتق‌گیری زنجیره‌ای در توابع دو متغیره

چنانچه $v = v(x, y)$ و $u = u(x, y)$ و $z = z(u, v)$ باشند ، می‌توان نشان داد:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم:

$$\begin{cases} u = xy^2 \\ v = x^2 - 3y \end{cases}$$

چنانچه بخواهیم عبارت $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ برحسب مشتقات z نسبت به v, u بازنویسی کنیم به چه می‌رسیم؟

حل :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = z_u\,.\,y^2 + z_v\,.\,2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 z_u + 2x\,z_v\right) = 2y\,z_u + y^2\left(z_{uu}\cdot u_y + z_{uv}\,v_y\right) + 2x\left(z_{vu}\cdot u_y + z_{vv}\cdot v_y\right)$$

$$= 2yz_u + y^2\left(z_{uu}.2xy + z_{uv}.(-3)\right) + 2x\left(z_{vu}.2xy + z_{vv}.(-3)\right)$$

✓ قاعده مشتق‌گیری ضمنی در توابع دو متغیره

چنانچه $F(x, y, z) = 0$، طبیعی است در این عبارت دو متغیر می‌توانند مستقل و متغیر سوم باید وابسته به آن دو باشد. می‌توان نشان داد:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_x}$$

مثال : با این فرض که $x^{y^2+z} + z^{xy} - 3xyz = 0$ مطلوبست محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}$.

حل :

$$F(x, y, z) = x^{y^2+z} + z^{xy} - 3xyz = 0$$

داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\left(y^2+z\right)x^{y^2+z-1} + y \cdot z^{xy} \cdot \ln z - 3yz}{x^{y^2+z} \cdot \ln x + xyz^{xy-1} - 3xy}$$

مثال : فرض کنید داشته باشیم $f(x, y, z) = 0$ حاصل $I = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z}$ کدام است؟

حل :

$$I = \left(\frac{-F'_x}{F'_z}\right)\left(-\frac{F'_y}{F_x}\right)\left(-\frac{F'_z}{F'_y}\right) = -1$$

✓ توابع دو متغیره همگن و قضیه اویلر

تابع $f(x, y)$ را همگن از درجه α می‌گویند هرگاه داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x, y)$$

مطابق قضیه اویلر در چنین وضعیتی داریم:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha(\alpha - 1) f$$

صورت دوم قضیه اویلر:

هرگاه $f(z) = g(x,y)$ بوده و تابع $g(x,y)$ همگن از درجه α باشد، داریم:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha\frac{f(z)}{f'(z)}$$

مثال : کدام‌یک از گزینه‌های زیر در معادله $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-3z$ صدق می‌کند؟

الف) $z=-3(x+y)\,f\left(\frac{-y}{x}\right)$

ب) $z=\frac{1}{xy}\,f\left(\frac{1}{x+y}\right)$

ج) $z=\frac{x+y}{x^4+y^4}\,f\left(\frac{y}{x}\right)$

حل : مطابق قضیه اویلر گزینه‌ای صحیح است که در آن، z همگن از درجه $\alpha=-3$ باشد.

مشاهده می‌شود:

گزینه الف) همگن از درجه $\alpha=1$ است.

گزینه ب) همگن نمی‌باشد.

گزینه ج) همگن از درجه $\alpha=-3$ می‌باشد.

مثال : فرض کنید داشته باشیم $f(x,y)=\cos\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+y^3}}{x+y}\right)$ حاصل $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ کدام است؟

حل : بدیهی است:

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)=\lambda^0 f(x,y)$$

یعنی $f(x,y)$ تابعی همگن از درجه $\alpha=0$ است. پس طبق قضیه اویلر داریم:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0\cdot f$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}=-y\frac{\partial f}{\partial y}\quad\rightarrow\quad\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{y}{x}$$

این نتیجه برای هر تابع دو متغیره $f(x,y)$ای که همگن از درجه $\alpha=0$ باشد، صحیح است.

مثال : هر گاه $x^2+y^2+z^2=1$ آن‌گاه $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ برابر است با:

حل : طبق قاعده مشتق‌گیری ضمنی داریم:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2x}{2z}\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{2y}{2z}\end{aligned}\right\}\rightarrow\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{z}-\frac{y^2}{z}=-\frac{x^2+y^2}{z}$$

و چون $x^2+y^2+z^2=1$ حاصل چنین می‌شود:

$$-\frac{1-z^2}{z}=z-\frac{1}{z}$$

راه دیگر : داریم : $x^2+y^2=1-z^2$ و از آنجا که $g(x,y)=x^2+y^2$ تابعی همگن از درجه دو می باشد و $f(z)=1-z^2$، طبق فرم دوم قضیه اویلر داریم :

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\alpha\frac{f(z)}{f'(z)}=2\frac{1-z^2}{-2z}=z-\frac{1}{z}$$

مسایل اکسترمم در توابع دو متغیره

✓ ۱) اکسترمم‌های نسبی در توابع دو متغیره

می‌گوئیم تابع $z=f(x,y)$ در (x_0,y_0) دارای نقطه بحرانی است، هرگاه عبارت‌های $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ در (x_0,y_0) توأما صفر و یا بی‌نهایت شوند (چهار حالت).

مطابق قضیه‌ای هرگاه $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ در (x_0,y_0) توأماً صفر باشند، با فرض:

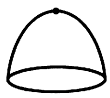
$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x_0,y_0)=A\\&\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)=B\\&\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x_0,y_0)=C\end{aligned}\right\}\rightarrow\quad \Delta=B^2-AC$$

چنانچه $A>0$ و $\Delta<0$ باشد، تابع $f(x,y)$ در (x_0,y_0) دارای نقطه مینیمم نسبی است.

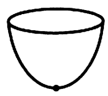
چنانچه $A<0$ و $\Delta<0$ باشد، تابع $f(x,y)$ در (x_0,y_0) دارای نقطه ماکسیمم نسبی است.

چنانچه $\Delta>0$ باشد، تابع $f(x,y)$ در (x_0,y_0) دارای نقطه زینی است.

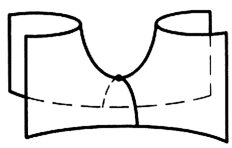
چنانچه $\Delta=0$ باشد این قضیه نوع نقطه بحرانی در (x_0,y_0) را مشخص نمی‌کند.



max نسبی



min نسبی



زینی

توجه: فرض کنید تابع $z=f(x,y)$ در (x_0,y_0) دارای نقطه بحرانی باشد ولی قضیه گفته شده برای تعیین نوع این نقطه بحرانی مناسب نباشد.

در چنین وضعیتی عبارت:

$$J=f(x_0+\Delta x,\,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

را تشکیل می‌دهیم (Δy و Δx به صفر می‌گرایند)

- چنانچه به ازاء همه مقادیر Δy و Δx داشته باشیم $J>0$، تابع در (x_0,y_0) دارای min نسبی است.
- چنانچه به ازاء همه مقادیر Δy و Δx داشته باشیم $J<0$، تابع در (x_0,y_0) دارای Max نسبی است.
- چنانچه به ازاء همه مقادیر Δy و Δx، J علامت یکسانی نداشته باشد، تابع در (x_0,y_0) دارای نقطه زینی است.

توجه: بدیهی است گاهی نوع نقطه بحرانی با نگاه معلوم می‌شود،

مثلاً: تابع $z = x^4 + y^4$ در نقطه بحرانی $(0,0)$ دارای Min نسبی (و مطلق) است.

مثلاً: تابع $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ در نقطه بحرانی $(0,0)$ دارای Max نسبی (و مطلق) است.

مثلاً: تابع $z = x^3 y^4$ در نقطه بحرانی $(0,0)$ دارای نقطه زینی است.

مثال : نقاط بحرانی و نوع آن‌ها را در توابع زیر تعیین کنید.

۱) $f(x,y) = 2x^2 + xy + y^2 - 5x - 3y$

حل :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x + y - 5 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad x = y = 1$$

تنها نقطه بحرانی در نقطه $(1,1)$ رخ می‌دهد.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 = A \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 1 = B \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 = C \end{cases} \rightarrow \quad \Delta = B^2 - AC = (1)^2 - (4)(2) = -7 < 0 \quad , \quad A = 4 > 0$$

پس تابع در $(1,1)$ دارای min نسبی است.

۲) $f(x,y) = 4xy^2 - 2x^2y - x$

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y^2 - 4xy - 1 = 0 \qquad (I)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8xy - 2x^2 = 0 \qquad (II)$$

$$II : 2x(4y - x) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ 4y - x = 0 \rightarrow \quad x = 4y \end{cases}$$

$$x = 0 \xrightarrow{I} 4y^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = 4y \xrightarrow{I} 4y^2 - 4(4y)y - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad -12y^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad y^2 = -\frac{1}{12}$$

که جوابی مختلط دارد و قابل قبول نیست . بنابراین وضعیت بحرانی در نقاط $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ و $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ رخ می‌دهد.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 8y - 4x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8x \end{cases}$$

در نقطه $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ داریم:

$$A = -2 \quad , \quad B = 4 \quad , \quad C = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta = B^2 - AC = 16 > 0$$

پس در نقطه $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ وضعیت زینی داریم و در نقطه $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ داریم:

$$A = 2 \quad , \quad B = -4 \quad , \quad C = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta = B^2 - AC = 16 > 0$$

پس در نقطه $\left(0, \frac{-1}{2}\right)$ وضعیت زینی داریم.

۲) اکسترمم‌های مطلق توابع دو متغیره در یک ناحیه

فرض کنید D ناحیه‌ای مشخص در صفحه xy باشد، برای تعیین مقادیر اکسترمم تابع $z = f(x, y)$ در این ناحیه به صورت زیر عمل می‌کنیم:

نخست تمام نقاط بحرانی تابع $f(x, y)$ را یافته و مقادیر z را در نقاط بحرانی که داخل ناحیه D واقعند، محاسبه می‌کنیم.

سپس مقادیر اکسترمم z را بر روی تک تک منحنی‌های مرزی ناحیه D به‌دست می‌آوریم. در انتها کمترین و بیشترین اعداد به‌دست آمده برای z را به عنوان اکسترمم های مورد نظر گزارش می دهیم.

قضیه :

اگر تابع $z = f(x, y)$ خطی باشد $(z = ax + by + C)$ و نیز تمام مرزهای ناحیه D خطوط راست باشند، مقادیر اکسترمم تابع $f(x, y)$ در ناحیه D در یکی از نقاط گوشه‌ای ناحیه D رخ می‌دهد.

مثال : مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع دو متغیره: $z = 2x - y$

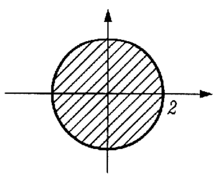
در ناحیه $x^2 + y^2 \le 4$ را پیدا کنید.

حل : ۱) برای یافتن نقاط بحرانی داریم :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \ne 0 , \infty$$

پس تابع مذکور نقطه بحرانی ندارد.

۲) یافتن مقادیر اکسترمم z روی مرزهای ناحیه:



تنها مرز ناحیه $x^2 + y^2 = 4$ است ، که به صورت پارامتری چنین بیان می‌شود.

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad ; 0 \le t \le 2\pi$$

و لذا تابع z روی این مرز به فرم تک متغیره به صورت زیر در می‌آید:

$$z(t) = 2(2\cos t) - 2\sin t = 4\cos t - 2\sin t$$

لذا بدست می‌آید:

$$\begin{cases} z_{max} = +\sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} \\ z_{min} = -\sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = -\sqrt{20} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{پس در کل :} \begin{cases} z_{max} = +\sqrt{20} \\ z_{min} = -\sqrt{20} \end{cases}$$

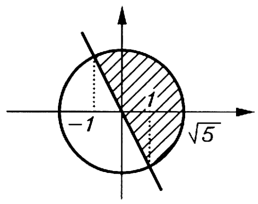
مثال : مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع:

$$z = 2x^2 + y^2 - 4x$$

را در ناحیه‌ای که از سمت راست به دایره $x^2 + y^2 = 5$ و از سمت چپ به خط $y = -2x$ محدود شده است محاسبه کنید.

حل :

۱) تعیین نقاط بحرانی تابع



$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 4x - 4 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad x = 1 , y = 0$$

چون $(1, 0) \in D$ است، پس یکی از کاندیدهای جواب چنین است:

$$z(1, 0) = -2$$

۲) تعیین مقادیر اکسترمم تابع روی مرزها:

روی مرز $y = -2x$ داریم: $(-1 \le x \le 1)$

$$z(x) = 2x^2 + (-2x)^2 - 4x = 6x^2 - 4x$$

$$z'(x) = 12x - 4 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{3} \in [-1, 1]$$

و لذا کاندید اکسترمم z روی این مرز عبارتند از:

$$\begin{cases} z(-1) = 10 \\ z(1) = 2 \\ z\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

روی مرز $x^2 + y^2 = 5$ داریم: $\left(-1 \le x \le \sqrt{5}\right)$

$$(x) = 2x^2 + \left(5 - x^2\right) - 4x = x^2 - 4x + 5$$

$$z'(x) = 2x - 4 \quad \rightarrow \quad x = 2 \in \left[-1, \sqrt{5}\right]$$

لذا کاندیدای اکسترمم z روی این مرزها عبارتند از:

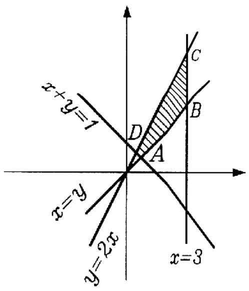
$$\begin{cases} z(-1) = 10 \\ z\left(\sqrt{5}\right) = 10 - 4\sqrt{5} \quad \rightarrow \\ z(2) = 1 \end{cases}$$

پس در کل:

$$\begin{cases} z_{min} = -2 \\ z_{max} = 10 \end{cases}$$

مثال : مقادیر max و min تابع $z = 3x + y$ در ناحیه محصور شده به خطوط $x = 3$ و $x + y = 1$ و $y = 2x$ و $y = x$ را پیدا کنید.

حل : چون تمام مرزهای ناحیه D خط راست و تابع z نیز خطی است، کاندیدای مقادیر اکسترمم z در ناحیه D عبارتند از مقادیر z در نقاط گوشه‌ای ناحیه D که چنین‌اند:



نقاط تقاطع: $\begin{cases} A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ B(3, 3) \\ C(3, 6) \\ D\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$ $\quad \left.\begin{matrix} z(A) = 2 \\ z(B) = 12 \\ z(C) = 15 \\ z(D) = \frac{5}{3} \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} z_{min} = 2 \\ z_{max} = 15 \end{cases}$

✓ ۳) اکسترمم‌های مشروط در توابع دو متغیره

برای یافتن مقادیر اکسترمم تابع $z = f(x, y)$ با این شرط که $g(x, y) = 0$ باشد، تابعی به صورت:

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

که به تابع لاگرانژ مساله موسوم است، تشکیل می‌دهیم (λ را ضریب لاگرانژ می‌گویند).

با حل دستگاه $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ مقادیر x, y ای که به اکسترمم شدن تابع $f(x, y)$ با شرط $g(x, y) = 0$ می‌انجامند، به‌دست می‌آید.

توجه: اگر یکی از نقاط به‌دست آمده (x_0, y_0) باشد و داشته باشیم:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

چنانچه $J > 0$ باشد، در (x_0, y_0) اکسترمم مشروط حاصله از نوع Max نسبی است.

چنانچه $J < 0$ باشد، در (x_0, y_0) اکسترمم مشروط حاصله از نوع Min نسبی است.

توجه: روش لاگرانژ قابل تعمیم است، مثلاً برای یافتن اکسترمم‌های تابع $w = f(x, y, z)$ با دو شرط $h(x, y, z) = 0$ و $g(x, y, z) = 0$ تابع لاگرانژ به صورت $L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$ بوده و دستگاه لاگرانژی که باید حل شود چنین است:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \quad , \quad h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

مثال : کمترین و بیشترین فاصله مبدأ مختصات از تابع $x^2 + xy + y^2 = 4$ را بیابید.

حل : فاصلهٔ یک نقطه دلخواه (x, y) تا مبدأ $\sqrt{x^2 + y^2}$ است. لذا هدف ما یافتن مقادیر اکسترمم d و یا به تعبیری مقادیر اکسترمم $x^2 + y^2$ با شرط $xy + x^2 + y^2 = 4$ است.

تابع لاگرانژ مسئله چنین است :

$$L(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda\left(x^2 + xy + y^2 - 4\right)$$

و دستگاه لاگرانژ مسئله چنین است :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \;\rightarrow\; 2x + y\lambda + 2\lambda x = 0 \;\rightarrow\; 2x = -\lambda(2x + y) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \;\rightarrow\; \lambda x + 2y\lambda + 2y = 0 \;\rightarrow\; 2y = -\lambda(x + 2y) \;\rightarrow\; \dfrac{x}{y} = \dfrac{2x + y}{x + 2y} \;\rightarrow\; x^2 = y^2 \\ g(x, y) = 0 \;\rightarrow\; x^2 + xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله سوم داریم:

اگر $x = y \;\rightarrow\; x^2 + x^2 + x^2 = 4 \;\rightarrow\; 3x^2 = 4 \;\rightarrow\; x^2 = \dfrac{4}{3} \;\rightarrow\; d = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$

اگر $x = -y \;\rightarrow\; x^2 - x^2 + x^2 = 4 \;\rightarrow\; x^2 = 4 \;\rightarrow\; y^2 = 4 \;\rightarrow\; d = \sqrt{8}$

پس بدیهی است:

$$d_{min} = \sqrt{\frac{8}{3}} \qquad , \qquad d_{max} = \sqrt{8}$$

راه خوب مسئله:

$$x^2 + xy + y^2 = 4 \;\rightarrow\; r^2 + r^2 \cos\theta \sin\theta = 4 \;\rightarrow\; r^2 = \frac{4}{1 + \sin\theta\cos\theta} = \frac{8}{2 + \sin 2\theta} \;\rightarrow$$

$$\begin{cases} r^2_{max} = \dfrac{8}{2 + (-1)} = 8 \;\rightarrow\; r_{max} = \sqrt{8} \\ r^2_{min} = \dfrac{8}{2 + 1} = \dfrac{8}{3} \;\rightarrow\; r_{min} = \sqrt{\dfrac{8}{3}} \end{cases}$$

اپراتور برداری نابلا

$\vec{\nabla}$ در مختصات دکارتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}$$

۱) گرادیان یک تابع اسکالر

گرادیان تابع اسکالری به صورت $w = f(x\,,\,y\,,\,z)$ به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\text{grad } w = \vec{\nabla}\ w = \frac{\partial w}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\,\vec{k}$$

توجه مهم :

اگر $F(x\,,\,y\,,\,z) = 0$ معادله یک سطح (رویه) فضائی باشد، بردار حاصله از گرادیان $\left(\vec{\nabla} F = \frac{\partial F}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\,\vec{k}\right)$ در هر نقطه از این سطح، بردار عمود بر رویه در نقطه مذکور را نشان می‌دهد.

از این موضوع به خصوص سه استفاده زیر به عمل می‌آید:

الف) نوشتن معادله صفحه مماس و خط عمود بر یک رویه در هر نقطه از آن

ب) نوشتن معادله خط مماس و صفحه عمود بر یک منحنی حاصل از تقاطع دو رویه در هر نقطه

ج) تعیین زاویه بین دو رویه در هر نقطه تقاطع آن‌ها

مثال : معادله یک منحنی از طریق فصل مشترک دو رویه $C:\begin{cases} x^2 - yz = 3 \\ xz + y^2 = 3 \end{cases}$ توصیف شده است.

اولاً در نقطه‌ای از این منحنی با مختصات $(2,1,1)$ خطی مماس و صفحه‌ای عمود ترسیم کرده‌ایم معادله آن‌ها را بنویسید؟

ثانیاً در نقطه‌ای با مختصات $(2,1,1)$ زاویه بین دو رویه را بیابید .

حل : ابتدا گرادیان دو رویه فوق را بدست آورده و سپس ضرب خارجی این دو بردار نرمال را بدست می‌آوریم.

$$F(x,y,z) = x^2 - yz - 3 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}F = 2x\hat{i} - z\hat{j} - y\hat{k} \quad \rightarrow \quad \vec{n}_1 = \vec{\nabla}F\,\Big|_{(2,1,1)} = 4\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

$$G(x,y,z) = xz + y^2 - 3 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}G = z\hat{i} + 2y\hat{j} + x\hat{k} \quad \rightarrow \quad \vec{n}_2 = \vec{\nabla}G\,\Big|_{(2,1,1)} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

اولاً بدیهی است که از ضرب خارجی این دو بردار، برداری عمود بر هر دو بردار حاصل می‌شود، که بردار هادی خط مماس و بردار نرمال صفحه عمود است. لذا خواهیم داشت:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -9\hat{j} + 9\hat{k}$$

معادله صفحه عمود : $0(x-2)-9(y-1)+9(z-1)=0 \longrightarrow -y+z=0 \longrightarrow y=z$

معادله خط مماس : $\begin{cases} \dfrac{y-1}{-9}=\dfrac{z-1}{9} \\ x=2 \end{cases}$

ثانیاً بدیهی است زاویه بین دو رویه از طریق زاویه بین نرمال های آنها بدست می آید و داریم :

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1.\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\ |\vec{n}_2|}=\frac{4-2-2}{\sqrt{9}\sqrt{18}}=0$$

بنابراین دو رویه در نقطه مورد نظر بر هم عمودند .

۲) مشتق سوئی یک تابع اسکالر

مشتق سوئی تابع مشتق پذیر $w=f(x,y,z)$ در جهت بردار $\vec{u}$ که مبین شدت تغییرات تابع w در جهت $\vec{u}$ می‌باشد از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$Df_{\vec{u}}=\frac{df}{d\vec{u}}=\vec{\nabla}f\ .\ \vec{\lambda}_{\vec{u}}$$

(که در آن $\vec{\lambda}_{\vec{u}}=\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ برداریکه بردار $\vec{u}$ می باشد)

از آنجا که:

(α زاویه بین $\vec{\nabla}f$ و $\vec{\lambda}_{\vec{u}}$) : $\quad \vec{\nabla}f\ .\ \vec{\lambda}_{\vec{u}}=|\vec{\nabla}f|\,|\vec{\lambda}_{\vec{u}}|\cos\alpha$

لذا حداکثر مشتق سوئی تابع f در جهت بردار $\vec{\nabla}f$ رخ می‌دهد و مقدار این حداکثر، همان $|\vec{\nabla}f|$ بوده و البته مشتق سوئی تابع مشتق پذیر f در هر جهت عمود بر $\vec{\nabla}f$ برابر صفر خواهد شد.

تعریف مشتق سوئی:

اگر تابع $w=f(x,y,z)$ در نقطه (x_0,y_0,z_0) مشتق‌پذیر نباشد، برای محاسبه مشتق‌سوئی آن در جهت بردار $\vec{u}=u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}$ باید از تعریف که به صورت زیر می‌باشد، استفاده کنیم:

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0,z_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tu_1,y_0+tu_2,z_0+tu_3)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

مثال : مشتق سویی تابع $w=x^3+y^2z$ در نقطه $(1,1,2)$ و در جهت بردار $\vec{u}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ چه کسری از بیشترین مقدار مشتق سویی تابع w در نقطه مذکور است.

حل :

$$\vec{\nabla}w=3x^2\ \vec{i}+2yz\vec{j}+y^2\vec{k}\quad\to\quad\vec{\nabla}w(1,1,2)=3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}\quad,\quad\vec{\lambda}_{\vec{u}}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{3}$$

مشتق سویی تابع w در نقطه $(1,1,2)$ و در جهت $\vec{u}$ چنین بدست می آید:

$$\vec{\nabla}w\ .\ \vec{\lambda}_{\vec{u}}=(3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}).\left(\frac{2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}}{3}\right)=\frac{6+8+1}{3}=5$$

و حداکثر مشتق سویی تابع w در نقطهٔ $(1,1,2)$ برابر است با:

$$\left|\vec{\nabla} w\right| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26} \quad \rightarrow \quad \text{نسبت مورد نظر} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

مثال : توزیع دما در محیطی با رابطه $x^2 + xyz = T(x,y,z)$ داده شده است چنانچه در نقطه‌ای با مختصات $(1,2,3)$ قرارگرفته باشیم در چه جهتی حرکت کنیم که بیشترین احساس گرمی حاصل شود؟

حل :

$$\vec{\nabla} T = (2x+yz)\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$$

جهت بیشترین افزایش T در نقطه $(1,2,3)$: $\vec{\nabla} T(1,2,3) = 8\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$

یعنی اگر در نقطه $(1,2,3)$ باشیم:

- حرکت در جهت $8\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ به بیشترین احساس گرما منجر می‌شود.
- حرکت در جهت $-\left(8\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\right)$ به بیشترین احساس سرما منجر می‌شود.
- حرکت در هر جهتی عمود بر $\left(8\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\right)$ به احساس تغییر دما منجر نمی‌شود. (به طور لحظه‌ای)

مثال : مشتق سوئی تابع $f(x,y)$ در نقطه‌ای خاص در دو جهت $\left(2\vec{i} - \vec{j}\right)$ و $\left(\vec{i} + 3\vec{j}\right)$ به ترتیب $2\sqrt{5}$ و $\frac{\sqrt{10}}{10}$ شده است. مشتق سوئی در همان نقطه و در جهت $2\vec{i} + 3\vec{j}$ چقدر می‌شود؟

حل :

فرض می‌کنیم در نقطه مورد بحث $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$ به صورت $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ باشد.

حال از فرض‌های مسئله داریم:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}\right) \cdot \left(\dfrac{2\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{5}}\right) = 2\sqrt{5} \;\rightarrow\; 2\alpha - \beta = 10 \\[2ex]
\left(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}\right) \cdot \left(\dfrac{\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{10}}\right) = \dfrac{\sqrt{10}}{10} \;\rightarrow\; \alpha + 3\beta = 1
\end{array}\right\} \rightarrow \quad \alpha = \frac{31}{7} \quad , \quad \beta = -\frac{8}{7}$$

حال مشتق سوئی در نقطه مورد بحث و در جهت $2\vec{i} + 3\vec{j}$ چنین می‌شود:

$$\left(\frac{31}{7}\vec{i} + \frac{-8}{7}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{2\vec{i} + 3\vec{j}}{\sqrt{13}}\right) = \frac{(31)(2) + (-8)(3)}{7\sqrt{13}}$$

مثال : اگر تابع $f(x,y) = \begin{cases} 0 & , (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & , (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$ و $u = (u_1, u_2)$ برداری یکّه (واحد) باشد، آن‌گاه مشتق جهتی تابع f در $(0,0)$ در امتداد u کدام است؟

۱) $u_2^3 - u_2^5$ ۲) $\frac{u_1^3u_2^5}{1-2u_1^2u_2^2}$ ۳) $\frac{u_1^2u_2^3}{u_1^4+u_2^4}$ ۴) وجود ندارد.

حل : طبق تعریف مشتق سویی، حاصل مورد نظر برابر است با:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{(tu_1)^2(tu_2)^3}{(tu_1)^4 + (tu_2)^4}}{t} = \frac{u_1^2u_2^3}{u_1^4+u_2^4}$$

۳) دیورژانس و کرل یک تابع برداری

برای تابع برداری $\vec{F}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ داریم:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$\operatorname{curL}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

مثال : دیورژانس کرل تابع:

$$\vec{F} = \left(x^2 - yz\right)\vec{i} + \left(xyz + y^2\right)\vec{j} + \left(x - z^3\right)\vec{k}$$

را پیدا کنید

حل :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - yz & xyz + y^2 & x - z^3 \end{vmatrix} = \vec{i}(0 - xy) - \vec{j}(1 + y) + \vec{k}(yz + z)$$

پس داریم:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-xy) + \frac{\partial}{\partial y}(-1 - y) + \frac{\partial}{\partial z}(yz + z) = -y - 1 + y + 1 = 0$$

مثال : اگر $\vec{r} = xi + yj + zk$ باشد، حاصل $\operatorname{div}\left(|r|^2 . \vec{r}\right)$ را بیابید .

حل :

$$|r|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \rightarrow \quad |r|^2\,\vec{r} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)(xi + yj + zk) \quad \rightarrow$$

$$\operatorname{div}\left(|r|^2\,\vec{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right)$$

$$= \left(3x^2 + y^2 + z^2\right) + \left(x^2 + 3y^2 + z^2\right) + \left(x^2 + y^2 + 3z^2\right) = 5\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = 5|r|^2$$

نکته : کرل گرادیان هر تابع اسکالر همواره صفر است.

$$\vec{\nabla} \times (\nabla \vec{w}) = \vec{0}$$

نکته : دیورژانس کرل هر تابع برداری همواره صفر است.

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$$

۴) لاپلاسین یک تابع اسکالر

دیورژانس گرادیان یک تابع را لاپلاسین آن تابع می‌نامند.

$$\Delta w = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\, w\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

هرگاه لاپلاسین تابعی صفر شود آن تابع را همساز می‌گویند.

مثال : فرض کنید $u(x,y)$ تابعی همساز باشد حاصل $\nabla^4(xu)$ کدام است؟ $\left(\nabla^4 = \nabla^2\,\nabla^2\right)$

حل :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(xu) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u + xu_x\right) = u_x + u_x + x\,u_{xx}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(xu) = xu_{yy}$$

نخست می‌نویسیم:

$$\nabla^2(xu) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(xu) = \left(2u_x + xu_{xx}\right) + \left(x\,u_{yy}\right) = 2u_x + x\left(u_{xx} + u_{yy}\right) = 2u_x$$

البته $\left(u_{xx} + u_{yy}\right)$ صفر است. زیرا طبق فرض ، u تابع همساز است.

حال به سراغ اصل مساله می‌رویم:

$$\nabla^4(xu) = \nabla^2\nabla^2(xu) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y}\right)\left(2u_x\right) = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u) = 0$$

$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u$ ، لاپلاسین u است و صفر می‌باشد.

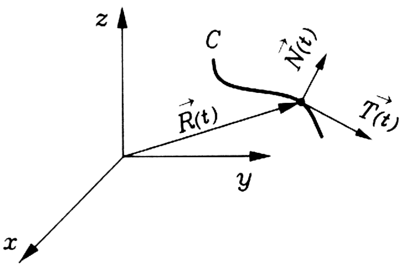
✓ چند نکته در ارتباط با توابع برداری

فرض کنید متحرکی روی منحنی C که از طریق بردار موضعی $\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ در حال حرکت باشد، بردارهای سرعت و شتاب این متحرک به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\vec{R}'(t)=\vec{V}(t)=x'(t)\,\vec{i}+y'(t)\,\vec{j}+z'(t)\,\vec{k}$$

$$\vec{R}''(t)=\vec{V}'(t)=\vec{a}(t)=x''(t)\,\vec{i}+y''(t)\,\vec{j}+z''(t)\,\vec{k}$$

- بردار یکانی مماس برمنحنی، از رابطه $\vec{T}(t)=\dfrac{\vec{R}'(t)}{\left|\vec{R}'(t)\right|}$ به‌دست می‌آید.
- بردار یکانی عمودی اصلی (نوع اول)، از رابطه $\vec{N}(t)=\dfrac{\vec{T}'(t)}{\left|\vec{T}'(t)\right|}$ به‌دست می‌آید.
- بردار یکانی عمودی نوع دوم، از رابطه $\vec{B}(t)=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)$ به‌دست می‌آید.
- انحناء منحنی، از رابطه $\kappa(t)=\dfrac{\left|\vec{R}'(t)\times R''(t)\right|}{\left|\vec{R}'(t)\right|^3}$ به‌دست می‌آید.
- تاب منحنی، از رابطه $\tau(t)=\dfrac{\vec{R}'(t).\left(\vec{R}''(t)\times\vec{R}'''(t)\right)}{\left|\vec{R}'(t)\times\vec{R}''(t)\right|^2}$ به‌دست می‌آید.
- صفحه‌ای که نرمال آن $\vec{T}(t)$ است را صفحه قائم منحنی می‌گوئیم.
- صفحه‌ای که نرمال آن $\vec{B}(t)$ است را صفحه بوسان منحنی می‌گوئیم.
- صفحه‌ای که نرمال آن $\vec{N}(t)$ است را صفحه اصلاحی می‌گوئیم.



✓ رابطه انحناء برای منحنی‌های تعریف شده در صفحه

۱) اگر منحنی C در صفحه با معادله دکارتی $F(x,y)=0$ تعریف شده باشد داریم:

$$\kappa(x)=\frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

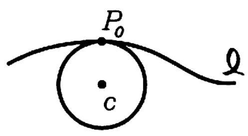
۲) اگر منحنی C در صفحه با معادله پارامتری $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ تعریف شده باشد، داریم:

$$\kappa(t)=\frac{|x'y''-x''y'|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

۳) اگر منحنی C در صفحه با معادله قطبی $r=f(\theta)$ تعریف شده باشد، داریم:

$$\kappa(\theta)=\frac{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

✓ دایره انحناء



اگر ℓ یک منحنی در صفحه بوده و در نقطهٔ P_0 انحناء مخالف صفر باشد، دایره‌ای که در نقطه P_0 به ℓ مماس می‌شود و مرکزش در طرف مقعر منحنی بوده و شعاع آن برابر شعاع انحناء در نقطه مذکور است را دایره انحناء یا دایره بوسان منحنی در نقطه P_0 می‌گویند.

مختصات مرکز دایره انحناء چنین به‌دست می‌آید.

$$x_C = x_{P_0} - \left.\frac{y'\left(1+y'^2\right)}{y''}\right|_{P_0} \qquad , \qquad y_C = y_{P_0} + \left.\frac{1+y'^2}{y''}\right|_{P_0}$$

مثال : حداکثر انحناء منحنی $y = \ln x$ در چه نقطه‌ای رخ می‌دهند؟

$$\kappa(x) = \frac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

حل :

$$y = \ln x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad y'' = -\frac{1}{x^2}$$

داریم:

$$\kappa(x) = \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{x^3}} = \frac{x}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

برای max کردن $\kappa(x)$ داریم:

$$\kappa'(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}(2x)(x)}{\left(x^2+1\right)^3} = 0 \quad \rightarrow \quad \left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\left(x^2+1\right)-3x^2\right\}=0 \quad \rightarrow$$

$$1-2x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال : حداکثر انحناء بیضی $4x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ چقدر است؟

حل : با نوشتن معادله بیضی داده شده در فرم پارامتری داریم:

$$4x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x' = -\frac{1}{2}\sin t \quad , \quad x'' = -\frac{1}{2}\cos t \\ y' = 3\cos t \quad , \quad y'' = -3\sin t \end{cases}$$

باتوجه به رابطه $\kappa(t)=\dfrac{|x'y''-x''y'|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ به‌دست می‌آید:

$$\kappa(t)=\frac{\left|\frac{3}{2}\sin^2 t+\frac{3}{2}\cos^2 t\right|}{\left(\frac{1}{4}\sin^2 t+9\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{4}+\frac{35}{4}\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$$

طبیعی است حداکثر انحناء به ازاء حداقل مقدار مخرج عبارت حاصله به‌دست می‌آید و داریم:

$$\kappa_{max}=\frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{1}{4}+0\right)^{\frac{3}{2}}}=12$$

مثال : انحناء منحنی $r=1+\cos\theta$ در کدام θ برابر با $\frac{3}{2}$ می‌شود؟

حل :

$$r=1+\cos\theta \quad\rightarrow\quad r'=-\sin\theta \quad\rightarrow\quad r''=-\cos\theta$$

باتوجه به رابطه $\kappa(\theta)=\dfrac{\left|r^2+2r'^2-rr''\right|}{\left(r^2+r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ داریم:

$$\kappa(\theta)=\frac{\left|1+\cos^2\theta+2\cos\theta+2\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta\right|}{\left(1+\cos^2\theta+2\cos\theta+\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\left|3(1+\cos\theta)\right|}{\left(2(1+\cos\theta)\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{2\sqrt{2}\,(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

پس ما می‌خواهیم:

$$\frac{3}{2\sqrt{2}\,(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2}\quad\rightarrow\quad\sqrt{2}\,(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}=1\quad\rightarrow\quad(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\rightarrow$$

$$1+\cos\theta=\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad\cos\theta=-\frac{1}{2}\quad\rightarrow\quad\theta=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$$

مثال : معادله خط مماس بر منحنی $c:\begin{cases}x^3=y\\ z^3+y^2=2\end{cases}$ در نقطه $(1,1,1)$ چیست؟

حل : اگر منحنی را به صورت پارامتری بنویسیم ، داریم:

$$c:\begin{cases}x=t\\ y=t^3\\ z=\sqrt[3]{2-t^6}\end{cases}\quad\rightarrow\quad\vec{R}(t)=t\,\vec{i}+t^3\,\vec{j}+\sqrt[3]{2-t^6}\,\vec{k}\quad\rightarrow\quad\vec{R}'(t)=\vec{i}+3t^2\,\vec{j}+\frac{-6t^5}{3\sqrt[3]{\left(2-t^6\right)^2}}\,\vec{k}$$

لذا بردار مماس بر منحنی در نقطه $(1,1,1)$ که نظیر $t=1$ می‌باشد، چنین است:

$$\vec{R}'(1)=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$$

و معادله خط مماس در نقطه مذکور $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$ می‌باشد.

راه دیگر: منحنی C به صورت فصل مشترک دو رویه داده شده و داریم:

$$C:\begin{cases} x^3 - y = 0 & \rightarrow \quad \vec{\nabla} F = 3x^2\,\vec{i} - 1\vec{j} + 0\vec{k} \\ z^3 + y^2 - 2 = 0 & \rightarrow \quad \vec{\nabla} G = 0\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 3z^2\,\vec{k} \end{cases}$$

نرمال‌های دورویه در $(1,1,1)$ عبارتست از:

$$\vec{n}_1 = \vec{\nabla}F(1,1,1) = 3\vec{i} - \vec{j} \qquad , \qquad \vec{n}_2 = \vec{\nabla}G(1,1,1) = 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

و بردار مماس بر منحنی در نقطه مورد نظر از ضرب خارجی این دو نرمال به‌دست می‌آید:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 9\vec{j} + 6\vec{k} \equiv \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

مثال : اگر $\vec{R}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$ باشد، امتداد بردار یکانی قائم نوع دوم را در $t=1$ بیابید.

حل :

$$\vec{R}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k} \quad \rightarrow \quad \vec{R}'(t) = \vec{i} + 2t\,\vec{j} + 3t^2\,\vec{k}$$

پس بردار یکانی مماس چنین است:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{R}'(t)}{\left|\vec{R}'(t)\right|} = \frac{\vec{i} + 2t\,\vec{j} + 3t^2\,\vec{k}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}} \quad \rightarrow$$

$$\vec{T}'(t) = \frac{\left(2\vec{j} + 6t\vec{k}\right)\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4} - \left(\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}\right)\dfrac{8t + 36t^3}{2\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}}{\left(1 + 4t^2 + 9t^4\right)}$$

در $t = 1$ داریم:

$$\vec{T}(1) = \frac{\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}}{\sqrt{14}} \qquad , \qquad \vec{T}'(1) = \frac{-22\vec{i} - 16\vec{j} + 18\vec{k}}{14\sqrt{14}}$$

بنابراین امتدادهای بردار یکانی مماس و بردار یکانی قائم نوع اول عبارتند از:

$$\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \qquad , \qquad -11\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}$$

که البته بر هم عمودند و امتداد بردار یکانی قائم نوع دوم از ضرب خارجی دو بردار فوق چنین خواهد شد.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -11 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 42\vec{i} - 42\vec{j} + 14\vec{k} \equiv 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

راه دیگر: می دانیم : $\vec{B} = \dfrac{\vec{v}\times\vec{a}}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|}$

پس امتداد بردار یکانی قائم نوع دوم، همان امتداد بردار $\vec{v}\times\vec{a}$ می باشد و چون :

$$\vec{R}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k} \quad \rightarrow \quad \vec{R}'(t) = \vec{i} + 2t\,\vec{j} + 3t^2\,\vec{k} \quad \rightarrow \quad \vec{R}''(t) = 2\,\vec{j} + 6t\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{R}'(1) = \vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \qquad , \qquad \vec{a} = \vec{R}''(1) = 2\,\vec{j} + 6\,\vec{k}$$

$$\vec{v}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 6\,\vec{j} + 2\vec{k} \equiv 3\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

مثال : انحناء و تاب منحنی $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$ را بیابید.

حل :

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{r}''(t) = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

$$\vec{r}'''(t) = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$$

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{r}'' \times \vec{r}''' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$$

حال داریم:

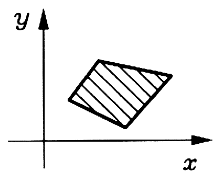
$$\kappa = \frac{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|}{\left|\vec{r}'\right|^3} = \frac{\left|\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k}\right|}{\left|-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}\right|^3} = \frac{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}}{\left(\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\right)^3} = \frac{1}{2}$$

$$\tau = \frac{\vec{r}' \cdot \left(\vec{r}'' \times \vec{r}'''\right)}{\left|\vec{r}' \times \vec{r}''\right|^2} = \frac{\left(-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}\right) \cdot \vec{k}}{\left|\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k}\right|^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

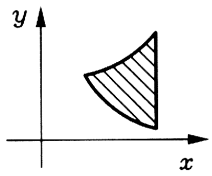
بحث انتگرال‌های دوگانه

✓ تعریف میدان (ناحیه) منظم در صفحه xy

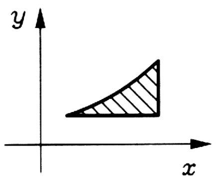
ناحیه D که در صفحه xy تعریف شده است را نسبت به محور xها منظم می‌گویند، هرگاه هر خط به موازات محور xها که از نقاط تلاقی منحنی‌های مرزی ناحیه D ترسیم می‌کنیم، از داخل این ناحیه عبور نکند.



نسبت به هر دو محور نامنظم



فقط نسبت به محور y منظم



نسبت به هر دو محور منظم

✓ انواع مسایل انتگرال‌های دوگانه

✓ ۱) محاسبه یک انتگرال دوگانه وقتی حدود انتگرال‌ها در آن نوشته شده است

یک انتگرال دوگانه با حدود معلوم شده، ممکن است به یکی از دو فرم زیر بیان شود:

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=P(x)}^{y=Q(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_{y=c}^{y=d}\int_{x=M(y)}^{x=N(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

مثلاً برای محاسبه انتگرال بالایی کافی است از تابع $f(x,y)$ با فرض آنکه x ثابت است، نسبت به متغیر y انتگرال بگیریم و پس از اعمال حدود y در این تابع اولیه، انتگرال یگانه معین حاصله را حل کنیم.

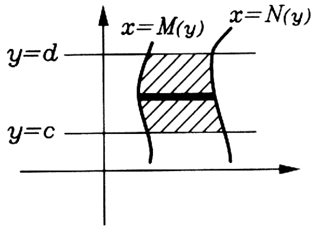
دقت داریم حدود انتگرال داخلی شامل هر متغیری باشد این حدود به متغیر دیگر تعلق دارد (و البته حدود انتگرال خارجی اعداد ثابت می‌باشد که به متغیر باقیمانده تعلق دارد). لذا مهم است دقت کنیم آیا ترتیب $dx\,dy$ یا $dy\,dx$ به طور مناسب بیان شده است؟

مثال : مطلوبست محاسبه $I=\int_0^1\int_0^x \cos x^2\,dx\,dy$.

حل : حدود انتگرال داخلی دارای متغیر x است. لذا این حدود به تغییر y تعلق دارد و به تعبیری قرار است انتگرال‌گیری نسبت به متغیر y شروع شود و ترتیب $dx\,dy$ به طور مناسب نوشته نشده است:

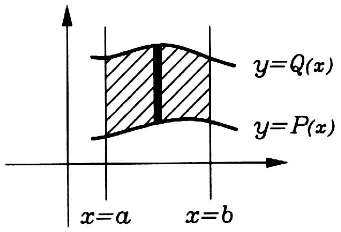
$$I=\int_0^1\int_0^x \cos x^2\,dy\,dx=\int_0^1 \cos x^2 . y\Big|_{y=0}^{y=x} dx=\int_0^1 x . \cos x^2\,dx=\frac{1}{2} . \sin x^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}\sin 1$$

✓ ۲) روش نوشتن حدود انتگرال‌های دوگانه باتوجه به ناحیه انتگرال‌گیری



ناحیه D نسبت به محور x منظم (المان موازی محور xها)

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_{y=c}^{d}\int_{x=M(y)}^{N(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$



ناحیه D نسبت به محور y منظم (المان موازی محور yها)

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_{x=a}^{b}\int_{y=P(x)}^{Q(x)} f(x,y)\,dx\,dy$$

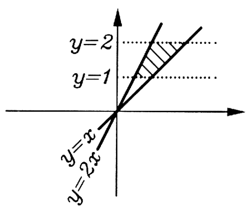
دقت کنید در محاسبه $\iint_D f(x,y)\,dA$ آن چیزی که حکم می‌کند، انتگرال‌گیری با چه متغیری شروع شود، امکان محاسبه تابع اولیه تابع $f(x,y)$ نسبت به متغیرهای x و یا y می‌باشد، البته اگر این امکان نسبت به هر دو متغیر موجود باشد، علاقه‌مندیم ترتیب انتگرال‌گیری را با متغیری شروع کنیم که ناحیه D نسبت به آن متغیر منظم باشد.

بدیهی است اگر بخواهیم انتگرال‌گیری را نسبت به متغیری شروع کنیم که میدان D نسبت به آن نامنظم است، باید D را به چند قسمت منظم نسبت به آن متغیر تفکیک کرده و سپس برای هر کدام از این زیر نواحی، حدود مربوط به انتگرال‌ها را نوشته و از طریق $\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\dots$ حاصل مورد نظر را حساب کنیم.

روش نوشتن حدود انتگرال‌های دوگانه وقتی میدان انتگرال‌گیری مشخص شده است:

مثال : مطلوبست محاسبه $I=\iint_D \dfrac{dy\,dx}{(x+y)^3}$ که در آن D ناحیه محدود شده به منحنی‌های $y=1\,,\,y=2\,,\,y=x\,,\,y=2x$ می‌باشد.

حل :



امکان محاسبه تابع اولیه $\dfrac{1}{(x+y)^3}$ نسبت به هر دو متغیر موجود است. میدان D نسبت به متغیر y نامنظم است.

لذا می‌نویسیم:

$$I=\int_{y=1}^{y=2}\int_{x=\frac{y}{2}}^{y}\frac{dx\,dy}{(x+y)^3}=\int_1^2 \frac{-1}{2(x+y)^2}\Bigg|_{x=\frac{y}{2}}^{x=y} dy=\int_1^2 -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4y^2}-\frac{4}{9y^2}\right)dy=-\frac{1}{2}\int_1^2\frac{9-16}{36\,y^2}\,dy$$

$$=\frac{-7}{72}\int_1^2 -\frac{dy}{y^2}=-\frac{7}{72}\,\frac{1}{y}\Bigg|_1^2=\frac{-7}{72}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{7}{72\times 2}=\frac{7}{144}$$

✓ ۳) تغییر ترتیب انتگرال‌گیری

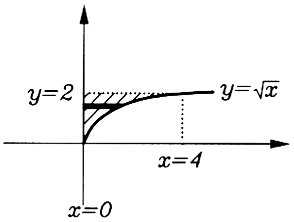
گاهی یک انتگرال دوگانه با حدود مشخص شده داده می‌شود و ترتیب انتگرال‌گیری به گونه‌ای است که اساساً امکان محاسبه تابع اولیه تابع زیر علامت انتگرال نسبت به متغیری که مورد نظر می‌باشد، وجود ندارد (یا این‌کار بسیار دشوار است)، در حالی که محاسبه تابع اولیه، نسبت به متغیر دیگر به سادگی موجود است.

در این شرایط به مصداق ضرب المثل «از این ستون به آن ستون فرج است!»

باتوجه به حدود انتگرال‌های داده شده، میدان انتگرال‌گیری را رسم کرده و از آنجا حدود انتگرال‌ها را برای ترتیب عوض شده نسبت به حالت اصلی، نوشته و حل را ادامه می‌دهیم.

مثال : مطلوبست محاسبه: $I = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \sqrt{1+y^3}\ dy\ dx$

حل : حدود انتگرال داخلی دارای x است یعنی قرار است انتگرال‌هایی با متغیر y شروع شود و ما می‌دانیم امکان محاسبه تابع اولیه $\sqrt{1+y^3}$ نسبت به متغیر y وجود ندارد. لذا با ترسیم میدان انتگرال‌گیری و تغییر ترتیب انتگرال‌گیری کار را ادامه می‌دهیم.

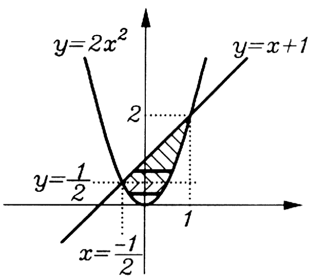


$$I = \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{y^2} \sqrt{1+y^3}\ dx\ dy = \int_0^2 \sqrt{1+y^3}\ x \Big|_0^{y^2} dy = \int_0^2 y^2 \sqrt{1+y^3}\ dy$$

$$= \frac{2}{9}\left(1+y^3\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{9}(27-1) = \frac{52}{9}$$

مثال : ترتیب انتگرال‌گیری را در مسأله $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} \int_{2x^2}^{x+1} f(x,y)\,dx\,dy$ عوض کنید.

حل : نخست میدان انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} y = x+1 \\ y = 2x^2 \end{cases} \rightarrow \text{نقاط تقاطع}: 2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \begin{matrix} x = 1, -\frac{1}{2} \\ y = 2, \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$y = 2x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y}{2}}$$

با توجه به شکل، میدان انتگرال‌گیری نسبت به متغیر x نامنظم است. لذا:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_{y-1}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)\,dx\,dy$$

✓ ۴) مواردی که تابع زیر علامت انتگرال در کل ناحیه انتگرال‌گیری با ضابطه منحصر به فردی تعریف نشده

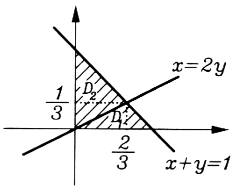
در این نوع مسایل باید به گونه‌ای مناسب ناحیه انتگرال‌گیری را به زیر نواحی کوچکتر به گونه‌ای تقسیم کنیم که در هر کدام از آن‌ها، بتوانیم تکلیف تابع زیر علامت انتگرال را مشخص نمائیم، سپس در هر قسمت با قرار دادن ضابطه مناسب برای تابع و نوشتن حدود مقتضی برای انتگرال‌ها، حل را دنبال می‌کنیم.

مثال : مطلوبست محاسبه $I=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ که در آن $D=\{(x,y)\mid x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ می‌باشد و $f(x,y)=\begin{cases} x & x<2y \\ y & x\ge 2y\end{cases}$ می‌باشد.

حل :

$D_1 : y$ نامنظم نسبت به

$D_2 : x$ نامنظم نسبت به



باید بنویسیم:

$$I=\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}=\int_{y=0}^{\frac{1}{3}}\int_{x=2y}^{1-y} y\,dx\,dy+\int_{x=0}^{\frac{2}{3}}\int_{y=\frac{x}{2}}^{1-x} x\,dy\,dx$$

$$=\int_{y=0}^{\frac{1}{3}} y\,x\Big|_{x=2y}^{1-y}dy+\int_{x=0}^{\frac{2}{3}} x\,y\Big|_{y=\frac{x}{2}}^{1-x}dx=\int_0^{\frac{1}{3}}y(1-y-2y)dy+\int_0^{\frac{2}{3}}x\left(1-x-\frac{x}{2}\right)dx$$

✓ ۵) استفاده‌هایی از انتگرال‌های دوگانه

اگر D ناحیه‌ای مشخص در صفحه با چگالی $f(x,y)$ باشد، داریم:

D مساحت ناحیه : $S=\iint_D 1\,dx\,dy$

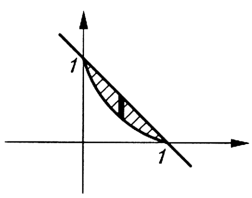
D جرم ناحیه : $m=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

D مختصات مرکز سطح ناحیه : $\bar{x}=\dfrac{\iint_D x\,dx\,dy}{S}$, $\bar{y}=\dfrac{\iint_D y\,dx\,dy}{S}$

مثال : مساحت ناحیه محدود شده به $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ و خط $x+y=1$ را بیابید.

حل : برای رسم $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ داریم $(0\le x, y \quad , \quad y\le 1 \quad , \quad x\le 1)$. لذا باید:

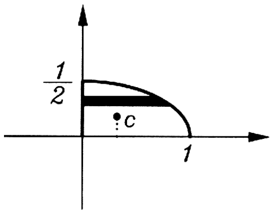
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1:\begin{cases} x=0 & \rightarrow & y=1 \\ x=1 & \rightarrow & y=0 \\ x=\frac{1}{4} & \rightarrow & y=\frac{1}{4}\ (\text{نقطه کمکی})\end{cases}$$



$$S=\int_0^1\int_{(1-\sqrt{x})^2}^{1-x} 1\,dy\,dx=\int_0^1\left((1-x)-(1-\sqrt{x})^2\right)dx=\int_0^1 2\sqrt{x}\,dx=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{4}{3}$$

مثال : قسمتی از سطح داخل بیضی $x^2 + 4y^2 = 1$ که در ربع اول دستگاه مختصات قرار گرفته است را در نظر گرفته‌ایم. فاصله مرکز سطح آن تا محور y ها چقدر است؟

حل :



لذا: $\bar{x} = \dfrac{\iint_D x\,dx\,dy}{S}$, $\begin{cases} x=0 \ \to \ y=\dfrac{1}{2} \\ y=0 \ \to \ x=1 \end{cases}$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\sqrt{1-4y^2}} x\,dx\,dy}{\frac{1}{4}\left(\pi\times 1\times\frac{1}{2}\right)} = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^{\sqrt{1-4y^2}} dy}{\frac{\pi}{8}} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\left(1-4y^2\right)dy = \frac{4}{\pi}\left(y-\frac{4}{3}y^3\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{3\pi}$$

✓ ۶) تغییر متغیر در انتگرال‌های دوگانه

فرض کنید در محاسبه $I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ به واسطه پیچیده بودن تابع $f(x,y)$ (که امکان محاسبه تابع اولیه آن نسبت به هیچ‌کدام از متغیرها موجود نیست) و یا پیچیده بودن ناحیه D (که نسبت به هیچ‌کدام از متغیرها منظم نیست) و یا هر دوی موارد فوق، بخواهیم از تغییر متغیرهای $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ استفاده کنیم (تا پیچیدگی‌های مذکور رفع شود).

در چنین وضعیتی نخست ژاکوپین تغییر دستگاه مختصات را از رابطه:

$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

محاسبه می‌کنیم (و در حقیقت داریم $dx\,dy = |j|\,du\,dv$).

سپس تبدیل یافته ناحیه D که در صفحه xy تعریف شده را در uv به‌دست می‌آوریم و آن را D' می‌نامیم.

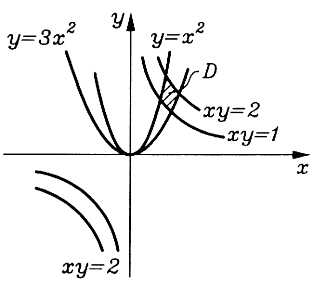
با بازنویسی عبارت $f(x,y)\,dx\,dy$ برحسب du, dv, u, v به $h(u,v)\,du\,dv$ می‌رسیم.

حال می‌توان گفت:

$$I = \iint_{D'} h(u,v)|J|\,du\,dv$$

مثال : مساحت ناحیه محصور شده به منحنی‌های $xy=1, xy=2, y=x^2, y=3x^2$ را پیدا کنید.

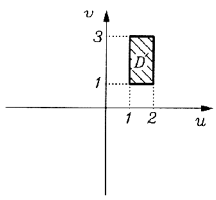
حل :



به واسطه پیچیده بودن میدان D با تغییر متغیرهای $\begin{cases} xy=u \\ \dfrac{y}{x^2}=v \end{cases}$ داریم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}y & x\\ -\frac{2y}{x^3} & \frac{1}{x^2}\end{vmatrix}}=\frac{1}{\frac{3y}{x^2}}=\frac{1}{3v}$$

$$\begin{cases}xy=1 & \to\quad u=1\\ xy=2 & \to\quad u=2\\ y=x^2 & \to\quad v=1\\ y=3x^2 & \to\quad v=3\end{cases}$$



حال می‌گوییم:

$$S=\iint_D 1\,dx\,dy=\iint_{D'}\left|\frac{1}{3v}\right|du\,dv=\int_{v=1}^{3}\int_{u=1}^{2}\frac{1}{3v}\,du\,dv$$

$$=\frac{1}{3}\ln v\Big|_1^3\cdot u\Big|_1^2=\frac{1}{3}(\ln 3-\ln 1)\cdot(2-1)=\frac{1}{3}(\ln 3)$$

مثال : حاصل انتگرال را پیدا کنید.

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x} e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dy\,dx$$

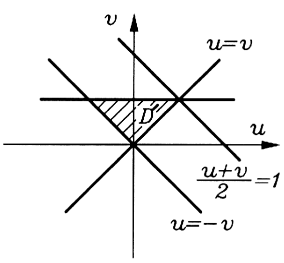
حل : بواسطه پیچیده بودن تابع زیر علامت انتگرال با تغییر متغیرهای زیر:

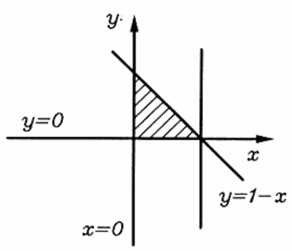
$$\begin{cases}x-y=u\\ x+y=v\end{cases}\quad\to\quad x=\frac{u+v}{2}\qquad y=\frac{v-u}{2}$$

داریم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}y=0 & \to\quad \frac{v-u}{2}=0 \quad\to\quad v=u\\ y=1-x & \to\quad x+y=1 \quad\to\quad v=1\\ x=0 & \to\quad \frac{u+v}{2}=0 \quad\to\quad u=-v\\ x=1 & \to\quad \frac{u+v}{2}=1\end{cases}$$

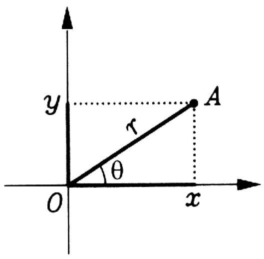




$$I=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\left|\frac{1}{2}\right|du\,dv=\int_0^1\int_{-v}^{v}\frac{1}{2}e^{\frac{u}{v}}\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_0^1 v\,e^{\frac{u}{v}}\Big|_{-v}^{v}dv=\frac{1}{2}\int_0^1 v\left(e^1-e^{-1}\right)dv$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^1-e^{-1}\right)\frac{1}{2}v^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(e^1-e^{-1}\right)$$

✓ ۷) انتگرال‌های دوگانه در مختصات قطبی



متغیرهای دستگاه مختصات دکارتی (x, y) و قطبی (r, θ) به صورت مقابل به همدیگر وابسته می‌شوند:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} ; \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \text{Arc}\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases}$$

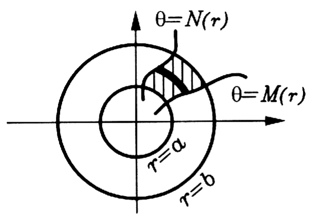
و می‌توان نشان داد: $dx\,dy = r\,dr\,d\theta \quad ;(\ |J| = r\ )$

توجه: همان‌طوری‌که وجود جمله $x^2 + y^2$ در معادله مرزهای ناحیه انتگرال‌گیری (مرزهای دایره‌ای)، ممکن است استفاده از دستگاه مختصات قطبی را برای حل مناسب کند، وجود جمله $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ در معادله مرزهای ناحیه انتگرال‌گیری (مرزهای بیضی شکل)، ممکن است استفاده از تغییر متغیرهای شبه قطبی $\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$ را برای حل مناسب کند، در این حالت داریم:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = r^2$ و $dx\,dy = ab\,r\,dr\,d\theta$ و باید دقت کنیم در اینجا r دیگر به معنای فاصله نقطه تا مبدأ مختصات نمی‌باشد.

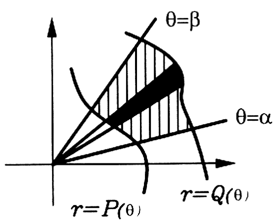
✓ روش نوشتن حدود انتگرال‌ها در مختصات قطبی

برای منحنی‌هایی که در صفحه xy ترسیم شده‌اند ولی معادله آن‌ها در مختصات قطبی و برحسب r, θ بیان شده است، داریم:



ناحیه D نسبت به متغیر θ منظم (المان محیطی)

$$\int_{r=a}^{b} \int_{\theta=M(r)}^{N(r)}$$



ناحیه D نسبت به متغیر r منظم (المان شعاعی)

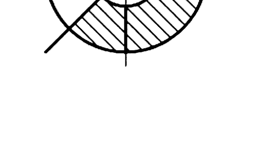
$$\int_{\theta=\alpha}^{\beta} \int_{r=P(\theta)}^{Q(\theta)}$$

مثال : مطلوبست محاسبه انتگرالهای زیر.

۱) $I = \iint_D x^2\,dx\,dy \quad , \quad D = \left\{(x, y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ y \le \sqrt{3}\,x\right\}$

حل :

در مختصات قطبی داریم:



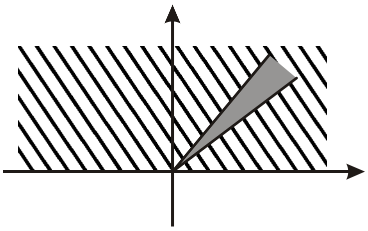
$$I = \int_{\theta = \frac{-2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{r=1}^{3} (r\cos\theta)^2\,(r\,dr\,d\theta)$$

$$I=\int_{\theta=\frac{-2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\int_1^3 r^3\,dr=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{\frac{-2\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_1^3$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{3}\right).\frac{1}{4}(81-1)=10\pi$$

۲) $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dy\,dx$

حل : در مختصات قطبی داریم:



$$I=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{+\infty}e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta=\theta\Big|_0^{\pi}.\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

۳) $I=\iint_{D:\frac{x^2}{9}+4y^2\le 1}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-4y^2}\,dx\,dy$

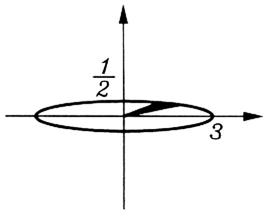
حل : با تغییر متغیر شبه قطبی زیر داریم:

$$\begin{cases}x=3\,r\cos\theta\\ y=\frac{1}{2}r\sin\theta\end{cases}\quad\rightarrow\quad\begin{cases}\frac{x^2}{9}+4y^2=r^2\\ dx\,dy=(3)\left(\frac{1}{2}\right)r\,dr\,d\theta\end{cases}$$

می‌توان نوشت:

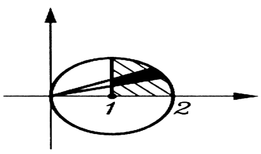
$$I=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\sqrt{1-r^2}\,\frac{3}{2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\frac{3}{2}\,\theta\Big|_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{r=0}^{1}=\frac{3}{2}(2\pi)\left(\frac{1}{3}\right)=\pi$$



۴) $I=\iint_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

که در آن D مطابق شکل است:



حل : در مختصات قطبی داریم:

$$I=\iint\frac{r\,dr\,d\theta}{r}$$

$$x=1\ \rightarrow\ r\cos\theta=1\ \rightarrow\ r=\frac{1}{\cos\theta}$$

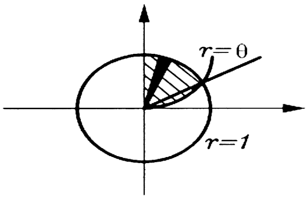
$$(x-1)^2+(y-0)^2=1 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2-2x=0 \quad \rightarrow$$

$$r^2-2r\cos\theta=0 \quad \rightarrow \quad r=2\cos\theta$$

$$\rightarrow \quad I=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{r=\frac{1}{\cos\theta}}^{2\cos\theta}\frac{r\,dr\,d\theta}{r}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)d\theta=\left(2\sin\theta-\operatorname{Ln}(\sec\theta+\tan\theta)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}+\operatorname{Ln}\left(\sqrt{2+1}\right)$$

مثال : مساحت محدود شده در شکل مقابل را حساب کنید.



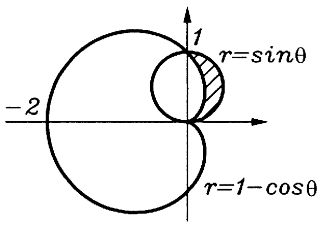
حل : ناحیه مذکور نسبت به r نامنظم است. باید بنویسیم:

$$\begin{cases} r=1 \\ \theta=r \end{cases} \rightarrow \quad \theta=1$$

$$S=\iint_D dx\,dy=\iint_D r\,dr\,d\theta=\int_{\theta=0}^{1}\int_{r=0}^{\theta} r\,dr\,d\theta+\int_{\theta=1}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1} r\,dr\,d\theta$$

مثال : مساحت ناحیه بیرون دل نمای $r=1-\cos\theta$ و داخل دایره $r=\sin\theta$ چقدر است؟

حل :



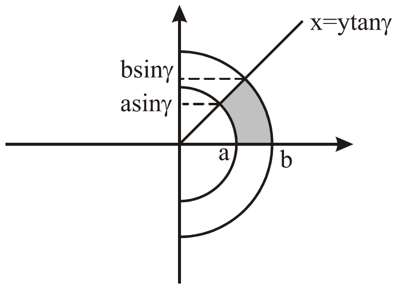
$$r=\sin\theta \quad \rightarrow \quad r^2=r\sin\theta \quad \rightarrow$$

$$x^2+y^2=y \quad \rightarrow \quad x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \quad s=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=1-\cos\theta}^{\sin\theta} r\,dr\,d\theta$$

مثال : برای محاسبه حجم زیر رویه $f(x,y)=\sqrt{k^2-x^2-y^2}$ در بالای ناحیه D از صفحه xy، مجموع انتگرال‌های $V=\int_0^{a\sin\gamma}\left[\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}} f(x,y)dx\right]dy+\int_{a\sin\gamma}^{b\sin\gamma}\left[\int_{y\cot\gamma}^{\sqrt{b^2-y^2}} f(x,y)dx\right]dy$ به دست آمده است که در آن $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ و $0<a<b<k$ ثابت‌اند. حجم V کدام است؟

حل : با توجه به حدود دو انتگرال نوشته‌شده، ناحیه D به شکل زیر است:



بنابراین برای محاسبه حجم ناحیه مورد نظر با استفاده از مختصات قطبی می‌توان نوشت:

$$V=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\gamma}\int_a^b \sqrt{k^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta=(\theta)\Big|_0^{\gamma}\left(\frac{-1}{3}\left(k^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_a^b$$

$$=\frac{\gamma}{3}\left(\left(k^2-a^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(k^2-b^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

انتگرال های منحنی الخط

انتگرال‌های منحنی الخط نوع اول

یک انتگرال منحنی الخط نوع اول به صورت $\int_c f(x, y, z)\, ds$ بیان می‌شود که در آن c یک منحنی مشخص و $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ المان طول قوس روی منحنی c می‌باشد.

روال کلی برای محاسبه این انتگرال آن است که باتوجه به معادله منحنی c و ارتباطی که بین متغیرها روی آن وجود دارد، عبارت $f(x, y, z)\, ds$ را برحسب تنها یک متغیر نوشته و با در نظر گرفتن حدود آن متغیر، یک انتگرال یگانه معین معمولی را حل کنیم.

توجه ۱ :

اگر منحنی c در صفحه با رابطه $y = P(x)$ بیان شده باشد داریم:

$$ds = \sqrt{1 + p'^2(x)}\; dx$$

اگر منحنی c در صفحه با رابطه $x = P(y)$ بیان شده باشد داریم:

$$ds = \sqrt{1 + p'^2(y)}\; dy$$

اگر منحنی c در صفحه با رابطه پارامتری $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \end{cases}$ بیان شده باشد داریم:

$$ds = \sqrt{p'^2(t) + q'^2(t)}\; dt$$

اگر منحنی c در صفحه با رابطه قطبی $r = p(\theta)$ بیان شده باشد داریم:

$$ds = \sqrt{p^2(\theta) + p'^2(\theta)}\; d\theta$$

اگر منحنی c در فضا با رابطه پارامتری $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \\ z = r(t) \end{cases}$ بیان شده باشد داریم:

$$ds = \sqrt{p'^2(t) + q'^2(t) + r'^2(t)}\; dt$$

توجه ۲ :

برای منحنی c با چگالی $\rho(x, y, z)$ داریم:

طول منحنی: $L = \int_c ds$

جرم منحنی: $m = \int_c \rho(x, y, z)\, ds$

مختصات مرکز طول: $\bar{x} = \dfrac{\int_c x\, ds}{\int_c ds} \quad , \quad \bar{y} = \dfrac{\int_c y\, ds}{\int_c ds} \quad , \quad \bar{z} = \dfrac{\int_c z\, ds}{\int_c ds}$

توجه ۳ : اگر c یک منحنی در صفحه $x-y$ باشد که محورهای مختصات را قطع نکرده، داریم:

$S_x = 2\pi \int_c y\, ds$ مساحت سطح حاصل از دوران منحنی حول محور x

$S_y = 2\pi \int_c x\, ds$ مساحت سطح حاصل از دوران منحنی حول محور y

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \int_c \left(x^2+y^2\right) ds$ که در آن c قسمتی از منحنی $\left(\frac{t^2}{2}, t, \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{\frac{3}{2}}\right)$ که از نقطه نظیر $t=0$ تا $t=1$ پیموده شده است.

حل :

$$ds = \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\, dt = \sqrt{\left(\frac{2t}{2}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dt = \sqrt{t^2+1+2t}\, dt = |t+1|\, dt$$

$$x^2+y^2 = \left(\frac{t^2}{2}\right)^2 + (t)^2 = \frac{t^4}{4} + t^2$$

حال می‌توان نوشت:

$$I = \int_{t=0}^{1} \left(\frac{t^4}{4} + t^2\right) |t+1|\, dt$$

مثال : فاصله مرکز ثقل منحنی به معادله $0 \le t \le \pi$, $\begin{cases} x = t+\sin t \\ y = 1-\cos t \end{cases}$ از محور xها کدام است؟

حل :

$$\overline{y} = \frac{\int_c y ds}{\int_c ds} = \frac{\int_c y\sqrt{x'^2+y'^2}\, dt}{\int_c \sqrt{x'^2+y'^2}\, dt} = \frac{\int_0^\pi (1-\cos t)\sqrt{(1+\cos t)^2+(\sin t)^2}\, dt}{\int_0^\pi \sqrt{(1+\cos t)^2+(\sin t)^2}\, dt}$$

$$= \frac{\int_0^\pi (1-\cos t)\sqrt{2(1+\cos t)}\, dt}{\int_0^\pi \sqrt{2(1+\cos t)}\, dt} = \frac{\int_0^\pi 2\sin^2\frac{t}{2} . 2\cos\frac{t}{2}\, dt}{\int_0^\pi 2\cos\frac{t}{2}\, dt} = \frac{\frac{8}{3}\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^\pi}{4\sin\frac{t}{2}\Big|_0^\pi} = \frac{2}{3}$$

مثال : طول منحنی $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ در بازهٔ $1 \le x \le e$ کدام است؟

حل :

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\, dx = \sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\, dx = \sqrt{1+\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)^2}\, dx = \left|\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right| dx$$

حال می‌گوییم:

$$L=\int_c 1\,ds=\int_1^e\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}\ln x\right)\Bigg|_1^e=\left(\frac{e^2}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\left(e^2+1\right)$$

مثال : طول قوس منحنی c به معادله $\left(x=\ln\sqrt{4+t^2}\ ,\ y=\tan^{-1}\frac{t}{2}\right)$ در بازه $0\le t\le 2$ را بیابید .

حل :

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\ln\left(4+t^2\right)\\ y=\tan^{-1}\frac{t}{2}\end{cases}$$

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{\left(\frac{1}{2}.\frac{2t}{4+t^2}\right)^2+\left(\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\right)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{\frac{t^2}{\left(4+t^2\right)^2}+\frac{4}{\left(4+t^2\right)^2}}\,dt$$

$$=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{t^2+4}}dt=\ln\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)\Big|_0^2=\ln\left(2+2\sqrt{2}\right)-\ln 2=\ln\left(\frac{2+2\sqrt{2}}{2}\right)=\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

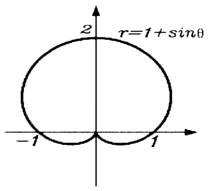
یاد آوری :

$$\int\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}dt=\ln\left(t+\sqrt{t^2+a^2}\right)\ \text{یا}\ \operatorname{Arcsinh}\left(\frac{t}{a}\right)$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}dt=\ln\left(t+\sqrt{t^2-a^2}\right)\ \text{یا}\ \operatorname{Arccosh}\left(\frac{t}{a}\right)$$

مثال : قسمتی از منحنی $r=1+\sin\theta$ که در ربع اول دستگاه مختصات واقع است را در نظر گرفته‌ایم: طول این منحنی و مساحت رویه حاصل از دوران این منحنی حول محور yها کدام است؟

حل :



$$r=1+\sin\theta$$

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\;d\theta=\sqrt{\left(1+\sin\theta\right)^2+\left(\cos\theta\right)^2}\;d\theta=\sqrt{2\left(1+\sin\theta\right)}\;d\theta$$

$$L=\int_c 1\,ds=\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\left(1+\sin\theta\right)}\;d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=\sqrt{2}\left(-2\cos\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}$$

ثانیاً:

$$S_y=2\pi\int_c x\,ds=2\pi\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sin\theta\right)\cos\theta\sqrt{2\left(1+\sin\theta\right)}\;d\theta$$

$$=2\sqrt{2}\;\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sin\theta\right)^{\frac{3}{2}}.\cos\theta\,d\theta=2\sqrt{2}\;\pi\,\frac{2}{5}\left(1+\sin\theta\right)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4\sqrt{2}\,\pi}{5}\left(4\sqrt{2}-1\right)$$

یادآوری:

$$1+\sin\theta=\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \quad , \quad 1-\sin\theta=\left(\sin\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$1+\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad 1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

انتگرال‌های منحنی‌الخط نوع دوم (کار یک نیرو)

اگر c یک منحنی معلوم و $\vec{r}=x\,i+y\,j+z\,\vec{k}$ بردار موضعی هر نقطه از c باشد، کار نیروی $\vec{F}=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$ روی مسیر c از رابطه زیر به‌دست می‌آید، که به یک انتگرال منحنی الخط نوع دوم موسوم است.

$$W=\int_c \vec{F}\,.\,d\vec{r}=\int_c P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

روال کلی برای محاسبه این نوع انتگرال نیز آن است که باتوجه به معادله منحنی c عبارت $P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ را برحسب تنها یک متغیر بیان کرده و باتوجه به حدود تغییرات آن متغیر، انتگرال یگانه معین حاصله را حل کنیم.

توجه ۱ :

میدان نیروی $\vec{F}(x,y,z)=P\,\hat{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k}$ را پایستار می‌گویند، هرگاه کار آن روی یک مسیر، مستقل از آن مسیر و تنها به نقاط ابتدایی و انتهایی مسیر بستگی داشته باشد.

شرط لازم و کافی برای آن که نیروی $\vec{F}=P\,\vec{i}+Q\,\vec{j}+R\,\vec{k}$ پایستار باشد، و به تعبیری $\int P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ مستقل از مسیر باشد آن است که:

الف) کرل $\vec{F}$ صفر باشد $\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{0}\right)$ و این متناظر است با برقراری همزمان سه معادله زیر:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial x}\\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}\end{cases}$$

ب) $\vec{F}$ را بتوان به صورت گرادیان یک تابع اسکالر نوشت و این متناظر است با این که تابعی مانند $u(x,y,z)$ موجود باشد که:

$\vec{F}=\vec{\nabla}u$ یا $P\,dx+Q\,dy+R\,dz=du$

که در این حالت u را تابع پتانسیل میدان نیروی پایستار $\vec{F}$ گفته و آن را می‌توان از حل دستگاه زیر به‌دست آورد:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=P\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial z}=R\end{cases}$$

توجه ۲ :

اگر $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ مستقل از مسیر باشد، حاصل آن را روی هر مرز بازی که نقطه A را به نقطه B وصل می‌کند ، می‌توان به دو طریق به‌دست آورد:

الف) روی یک مسیر دلخواه و ساده که A را به B متصل می‌کند، به محاسبه انتگرال می‌پردازیم.

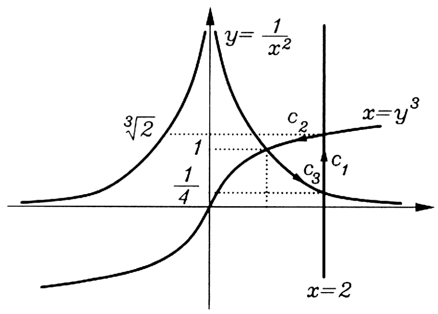
ب) تابع پتانسیل $u(x, y, z)$ را یافته و $u(B) - u(A)$ را محاسبه می‌کنیم.

توجه ۳ :

اگر $\int P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ مستقل از مسیر بوده و توابع P, Q, R و مشتقات جزئی مرتبه اول آن‌ها پیوسته باشد، حاصل انتگرال مذکور روی هر مرز بسته دلخواهی صفر خواهد شد.

(عکس این مطلب صحیح نیست یعنی ممکن است حاصل $\int \vec{F}\,.\,d\vec{r}$ روی یک مرز بسته صفر باشد، بدون آن‌که $\vec{F}$ پایستار و انتگرال مستقل از مسیر باشد)

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \oint_c y\,dx + x^2\,dy$ که در آن c منحنی بسته‌ای است که در جهت مثلثاتی طی شده و از تقاطع منحنی‌های $x = 2\ ,\ x = y^3\ ,\ y = \frac{1}{x^2}$ پدید آمده است:



حل :

$$\begin{cases} c_1 : x = 2 \quad \rightarrow \quad dx = 0 \\ c_2 : x = y^3 \quad \rightarrow \quad dx = 3y^2\,dy \\ c_3 : y = \dfrac{1}{x^2} \quad \rightarrow \quad dy = \dfrac{-2}{x^3}\,dx \end{cases}$$

باید بنویسیم:

$$I = \oint_c = \int_{c_1} + \int_{c_2} + \int_{c_3}$$

$$= \int_{\substack{y=\frac{1}{4} \\ c_1}}^{\sqrt[3]{2}} y(0) + (2)^2\,dy + \int_{\substack{y=\sqrt[3]{2} \\ c_2}}^{1} y\left(3\,y^2\,dy\right) + \left(y^3\right)^2\,dy + \int_{\substack{x=1 \\ c_3}}^{2} \left(\frac{1}{x^2}\right)dx + x^2\left(\frac{-2}{x^3}\right)dx$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \int_c y\,dx + x^2\,dy + xz\,dz$، که در آن c منحنی $\left(t^3, t^2, 1-t\right)$ است که از نقطه $t = 0$ تا $t = 1$ طی شده است.

حل :

$$I=\int_{t=0}^{1}\left(t^{2}\right)\left(3t^{2}\,dt\right)+\left(t^{3}\right)^{2}\left(2t\,dt\right)+\left(t^{3}\right)\left(1-t\right)\left(-dt\right)=\frac{3}{5}+\frac{2}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}=\frac{4}{5}$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I=\int_{c}\left(3x^{2}\cos y-1\right)dx+\left(\cos y-x^{3}\sin y\right)dy$ که در آن c قسمتی از منحنی $y=\frac{\pi}{3}x^{5}$ که از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $\left(1,\frac{\pi}{3}\right)$ طی شده است.

حل : مشاهده می‌شود انجام روال مستقیم مانند روال قبل امکان‌پذیر نیست. اما با کمی دقت می‌بینیم:

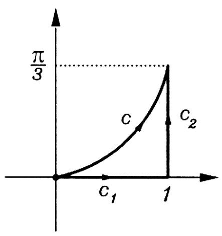
راه اول: تابع پتانسیل مساله را می‌یابیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^{2}\cos y-1\\[2mm]\dfrac{\partial u}{\partial y}=\cos y-x^{3}-\sin y\end{cases}\quad\rightarrow\quad u=x^{3}\cos y-x+\sin y$$

حال می‌گوییم:

$$I=u\left(1,\frac{\pi}{3}\right)-u(0,0)=\left(\frac{1}{2}-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-(0-0+0)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

راه دوم: چون انتگرال ما مستقل از مسیر شده است به جای محاسبه آن روی مسیر c آن را روی مسیر c_1+c_2 محاسبه می‌کنیم:



$$c_1: y=0\quad\rightarrow\quad dy=0$$
$$c_2: x=1\quad\rightarrow\quad dx=0$$

داریم:

$$I=\int_{c}=\int_{c_1}+\int_{c_2}=\int_{x=0}^{1}\left(3x^{2}-1\right)dx+\int_{y=0}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos y-\sin y\right)dy$$

$$=\left(x^{3}-x\right)\Big|_{x=0}^{1}+\left(\sin y+\cos y\right)\Big|_{y=0}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

مثال : ثابت‌های B , A را طوری بیابید که حاصل انتگرال:

$$I=\int\underbrace{ax^{2}y}_{P}\,dx+\underbrace{\left(x^{3}+2yz^{3}\right)}_{Q}dy+\underbrace{\left(bz^{2}y^{2}+z\right)}_{R}dz$$

مستقل از مسیر باشد و سپس حاصل آن را روی دو منحنی زیر پیدا کنید.

الف) مرز دلخواهی که نقطه $(1,0,1)$ را به نقطه $(1,1,0)$ وصل می‌کند.

ب) مرز حاصل از تقاطع کره $x^{2}+y^{2}+z^{2}=4$ و صفحه $z=1$.

حل : برای مستقل بودن از مسیر باید:

$$\begin{cases} P_y = Q_x \;\to\; a x^2 = 3x^2 \;\to\; a = 3 \\ P_z = R_x \;\to\; 0 = 0 \\ Q_z = R_y \;\to\; 6yz^2 = 2bz^2 y \;\to\; b = 3 \end{cases}$$

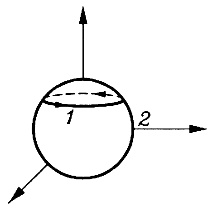
برای محاسبه تابع پتانسیل می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^3 + 2yz^3 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 y^2 + z \end{cases} \;\to\; u = x^3 y + y^2 z^3 + \frac{z^2}{2}$$

الف)

$$I = u(1,1,0) - u(1,0,1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ب) انتگرال مذکور مستقل از مسیر است و البته چون توابع P, Q, R و مشتقات جزئی مرتبه اول آن‌ها همه جا پیوسته است.



حاصل آن روی هر مرز بسته دلخواه مثل c حاصل از تقاطع کره و صفحه داده شده برابر صفر خواهد بود.

قضیه گرین:

هرگاه توابع $P(x,y), Q(x,y), \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ در تمام ناحیه D که به منحنی بسته C محدود شده است، توابعی پیوسته باشند، داریم:

$$\oint_{c^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

c^+ بدین معناست که جهت حرکت روی منحنی c در جهت مثلثاتی است و به تعبیری بهتر وقتی روی c حرکت می‌کنیم، ناحیه D در سمت چپمان واقع بشود.

توجه: در زمان استفاده از قضیه گرین دقت کنید آیا شرایط استفاده از این قضیه وجود دارد؟

مساله‌ای از (وقتی نمی‌توان از قضیه گرین استفاده نمود)

مثال : مطلوب است محاسبه $\int_c \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$ که در آن c دایره $x^2 + y^2 = 1$ می‌باشد.

حل :

در این مساله $Q(x,y)=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$ و $P(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ می‌باشند که هر دو در نقطه $(0,0)$ یعنی مبداء مختصات تعریف نشده‌اند و از آنجا که $(0,0)$ در داخل ناحیه محصور شده به منحنی $x^2+y^2=1$ قرار دارد، مجاز به استفاده از قضیه گرین نمی‌باشیم.

برای محاسبه جواب اگر منحنی $x^2+y^2=1$ را در فرم پارامتری به صورت $0\le t\le 2\pi \;;\; \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ در نظر بگیریم، عبارت زیر علامت انتگرال را برحسب تنها یک متغیر نتیجه می‌دهد:

$$I=\int_{t=0}^{2\pi}\frac{(\sin t)(-\sin dt)-(\cos t)(\cos t\,dt)}{(\cos t)^2+(\sin t)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\left(-\sin^2 t-\cos^2 t\right)dt}{\cos^2 t+\sin^2 t}=\int_0^{2\pi}-dt=-2\pi$$

راه دیگر:

چون روی منحنی c داریم $x^2+y^2=1$ لذا می‌توان نوشت:

$$I=\int_c\frac{y\,dx-x\,dy}{1}$$

حال در این مساله داریم $Q=-x$ و $P=y$ که همه جا توابعی پیوسته‌اند و لذا در داخل ناحیه $x^2+y^2\le 1$ نیز پیوسته بوده و اینک مجاز به استفاده از قضیه گرین می‌باشیم و می‌توان نوشت:

$$I=\iint_{D:\,x^2+y^2\le 1}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-x)-\frac{\partial}{\partial y}(y)\right\}dx=\iint_D(-1-1)\,dx\,dy=-2\,(\text{D مساحت ناحیه})=-2\left(\pi(1)^2\right)=-2\pi$$

توضیح اضافه: در مساله $I=\displaystyle\int_{c:x^2+y^2=1}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$ داریم:

$$P=\frac{y}{x^2+y^2}\quad\rightarrow\quad\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1\left(x^2+y^2\right)-2y(y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$Q=\frac{-x}{x^2+y^2}\quad\rightarrow\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{-1\left(x^2+y^2\right)-2x(-x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

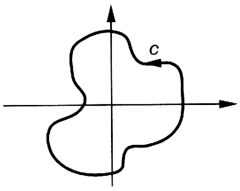
لذا ملاحظه می‌شود $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ و انتگرال مذکور مستقل از مسیر است. دقت کنید اگر توجه نکنیم که در این مساله استفاده ار قضیه گرین مجاز نمی‌باشد، خواهیم گفت:

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=0$$

که البته باتوجه به جواب به‌دست آمده $I=-2\pi$ نتیجه‌ای غلط است.

توضیح اضافه‌تر: برابر شدن $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ در $\displaystyle\int\frac{y\,dx-x\,dx}{x^2+y^2}$ تصریح می‌کند، این انتگرال مستقل از مسیر است و لذا حاصل آن روی هر مرز بسته دلخواهی که نقطه $(0,0)$ را در ناحیه داخلی خود نداشته باشد (و اجازه استفاده از قضیه گرین موجود باشد) برابر صفر خواهد شد و البته حاصل این انتگرال روی هر مرز بسته دلخواهی که نقطه $(0,0)$ را در ناحیه داخلی خود داشته باشد (و اجازه استفاده از قضیه گرین موجود نباشد) یکسان و برابر -2π است.

بنابراین اگر حاصل $\displaystyle\int\frac{y\,dx-x\,dx}{x^2+y^2}$ را روی مسیر دلخواهی مانند زیر بخواهیم،



چون دیدیم انتگرال مستقل از مسیر است می‌توانیم حاصل را روی $x^2+y^2=1$ که مانند این C مبدأ را در ناحیه داخلی خود دارد

و البته محاسبه انتگرال روی آن ساده است، محاسبه کنیم (ما اینکار را کردیم و جواب -2π به‌دست آمد) و آن را به عنوان جواب مورد نظر گزارش نمائیم. بدیهی است اگر انتگرال مذکور مستقل از مسیر نبود، برای محاسبه آن باید مسیر c به طور کامل مشخص شود.

مثال : مطلوبست محاسبه $I=\int_c \left(e^{2x}+3y\right)dx+\left(\cos y-x\right)dy$ که در آن c محیط بیضی $4x^2+9y^2=1$ است. (که یکبار در جهت مثلثاتی طی شده است.)

حل : استفاده از قضیه گرین مجاز بوده و می‌توان نوشت:

$$I=\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}(\cos y-x)-\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2x}+3y\right)\right\}dx\,dy=\iint_D(-1-3)\,dx\,dy=-4\times(\text{مساحت ناحیه } D)$$

$$=-4\left\{\pi\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{-2\pi}{3}$$

مثال : فرض کنید $Q(x,y)$ تابعی همساز باشد و مشتقات جزئی تا هر مرتبه آن همه جا پیوسته باشد چنانچه c یک منحنی بسته باشد که ناحیه D را به خود محدود کرده است. حاصل $I=\oint\left(\frac{\partial Q}{\partial y}dx-\frac{\partial Q}{\partial x}dy\right)$ کدام است؟

حل :

$$P=\frac{\partial Q}{\partial y}\qquad\qquad Q=-\frac{\partial Q}{\partial x}$$

مطابق قضیه گرین داریم:

$$I=\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right\}dx\,dy=\iint_D-\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right)dx\,dy=0$$

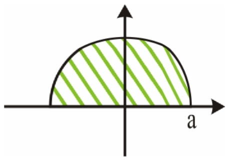
عبارت $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right)$، لاپلاسین تابع Q می باشد و چون همساز فرض شده، لاپلاسین آن صفر است.

مثال : مقدار انتگرال $\oint_C\left(\sin x+3y^2\right)dx+\left(2x-e^{-y^2}\right)dy$ که در آن C مرز نیم قرص $x^2+y^2\le a^2$ و $y\ge 0$، می‌باشد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده را بیابید

حل : طبق قضیه گرین داریم:

$$I=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(2x-e^{-y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin x+3y^2\right)\right)dx\,dy$$

که در آن D ناحیه‌ای مطابق شکل مقابل است:



$$I=\iint_D(2-6y)\,dx\,dy=\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{a}(2-6r\sin\theta)(r\,dr\,d\theta)=\int_0^{\pi}\int_0^{a}\left(2r-6r^2\sin\theta\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\left(r^2-2r^3\sin\theta\right)\Big|_0^a d\theta=\int_0^{\pi}\left(a^2-2a^3\sin\theta\right)d\theta=\left(a^2\theta+2a^3\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi}=a^2\pi-4a^3$$

انتگرال‌های منحنی‌السطح

۱) انتگرال‌های منحنی‌السطح نوع اول

یک انتگرال سطح نوع اول به صورت $\iint_S f(x, y, z)\, ds$ نوشته می‌شود که در آن S یک سطح فضائی و ds المان مساحت روی این سطح می‌باشد.

(تعریف: سطح S را نسبت به محور zها منظم می‌گویند هرگاه هر خط به موازات محور zها، سطح مذکور را حداکثر در یک نقطه قطع کند.)

چنانچه S سطحی منظم نسبت به محور zها باشد که با معادله $z = h(x, y)$ تعریف شده است و D تصویر این سطح روی صفحه xy فرض شود، داریم:

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

دو نکته:

الف) روی هر قسمت از مخروط $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ داریم:

$$dS = \sqrt{1 + a^2}\, dxdy$$

ب) روی هر قسمت از نیم‌کره‌های بالایی یا پایینی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ داریم:

$$dS = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy$$

توجه: اگر $\rho(x, y, z)$ چگالی هر نقطه از سطح S باشد داریم:

مساحت سطح S : $\iint_S 1\, dS$

جرم سطح S : $\iint_S \rho(x, y, z)\, dS$

مختصه ξاُم مرکز سطح S : $\bar{\xi} = \dfrac{\iint_S \xi\, dS}{\iint_S dS}$

مثال : مساحت قسمتی از صفحهٔ $x + 2y + z = 4$ که توسط استوانه $9x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$ بریده می‌شود را حساب کنید.

حل : سطح مورد نظر ما که قسمتی از صفحه داده شده است، نسبت به هر سه محور منظم است البته ما تصویر آن را فقط روی صفحه xy می‌شناسیم که البته داخل بیضی $9x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$ است.

$$z = 4 - x - 2y$$

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\ dx\,dy = \sqrt{1 + (-1)^2 + (-2)^2}\ dx\,dy$$

$$S = \iint_S 1\,ds = \iint_D \sqrt{6}\ dx\,dy = \sqrt{6}\ \ (\text{مساحت ناحیه } D) = \sqrt{6}\left(\pi\left(\frac{1}{3}\right)4\right) = \frac{4\sqrt{6}\,\pi}{3}$$

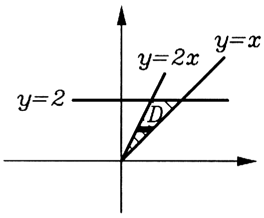
مثال : قسمتی از سطح مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ که توسط صفحات $y = x$, $y = 2x$, $y = 2$ بریده شده است را S نامیده‌ایم. مطلوبست محاسبه $I = \iint_S z^2\ dS$.

حل : سطح مورد نظر قسمتی از مخروط است لذا:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \to \quad dS = \sqrt{1 + \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}\ dx\,dy$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\ dx\,dy = \sqrt{2}\ dx\,dy$$

تصویر سطح مورد نظر روی صفحه xy چنین است:



D نسبت به x منظم

D نسبت به y نامنظم

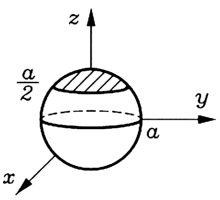
داریم:

$$I = \iint_D \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \left(\sqrt{2}\ dx\,dy\right) = \int_{y=0}^{2} \int_{x=\frac{y}{2}}^{y} \sqrt{2}\left(x^2 + y^2\right) dx\,dy$$

مثال : مساحت قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ که در بالای صفحه $z = \frac{a}{2}$ قرار دارد را حساب کنید.

حل : سطح S نسبت به محور zها منظم است.

روی سطح z:



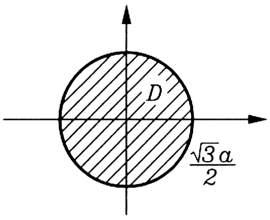
$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-2y}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2}\ dx\,dy$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\ dx\,dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\ dx\,dy$$

داریم:

$$S=\iint_S 1\,dS=\iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$



با استفاده از مختصات قطبی داریم:

$$S=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,dr\,d\theta=a\,\theta\Big|_0^{2\pi}\left\{-\sqrt{a^2-r^2}\right\}\Big|_{r=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=a^2\pi$$

۲) انتگرال‌های منحنی السطح نوع دوم (شار یک میدان برداری)

یک انتگرال سطح نوع دوم به صورت $\iint_S\left(\vec{F}\,.\,\vec{n}\right)dS$ نوشته می‌شود که در آن S یک سطح فضایی و $\vec{n}$ برداریکه عمود بر سطح S در هر نقطه از آن می‌باشد. بنا به تعریف حاصل این انتگرال شار مربوط به میدان برداری $\vec{F}$ که از سطح S عبور می‌کند را نشان می‌دهد.

توجه: بدیهی است اگر معادله سطح S با رابطه $G(x,y,z)=0$ بیان شده باشد، بردار حاصله از $\vec{\nabla}G\left(\frac{\partial G}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial G}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial G}{\partial z}\vec{k}\right)$، در هر نقطه عمود بر سطح S بوده و طبیعتاً برداریکه عمود بر این سطح از رابطه $\vec{n}=\frac{\vec{\nabla}G}{\left|\vec{\nabla}G\right|}$ قابل حصول خواهد بود.

مثال: فرض کنید s قسمتی از سطح سهمی گون $z=x^2+y^2$ باشد که توسط صفحات $z=4$ و $z=1$ بریده شده است و $\vec{n}$ بردار یکه عمود بر سطح s در هر نقطه از آن باشد. چنانچه $\vec{F}=z\vec{k}$ مطلوبست:

$$I=\iint_\sigma\left(\vec{F}\,.\,\vec{n}\right)dS$$

حل:

$$z=x^2+y^2\quad\rightarrow\quad dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

بردار عمودبر سطح s در هر نقطه از آن چنین بدست می آید :

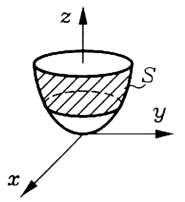
$$x^2+y^2-z=0=G(x,y,z)\quad\rightarrow\quad\vec{\nabla}G=\frac{\partial G}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial G}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial G}{\partial z}\vec{k}=2x\,\hat{i}+2y\,\hat{j}-1\,\vec{k}\quad\rightarrow$$

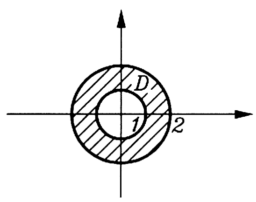
$$\vec{n}=\frac{\vec{\nabla}G}{\left|\vec{\nabla}G\right|}=\frac{2x\vec{i}+2y\vec{j}-1\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

$$\vec{F}\,.\,\vec{n}=\frac{-z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\quad\rightarrow\quad\vec{F}\,.\,\vec{n}=\frac{-\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

حال می‌گوییم:

$$I=\iint_s\left(\vec{F}\,.\,\vec{n}\right)ds=\iint_D\frac{-\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy=\int_0^{2\pi}\int_{r=1}^{2}-r^2\left(r\,dr\,d\theta\right)$$





انتگرال‌های سه‌گانه

انتگرال‌های سه گانه در مختصات دکارتی

در محاسبه انتگرال سه‌گانه‌ای به صورت $\iiint_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ که در آن V ناحیه‌ای مشخص در فضا می‌باشد که توسط رویه‌هایی معلوم، محصور گردیده است، کافی است باتوجه به معادلات رویه‌های مذکور حدود انتگرال‌ها را نوشته و حل را ادامه دهیم.

مثلاً چنانچه V ناحیه‌ای باشد که از بالا و پایین به رویه‌های $z = Q(x, y)$ و $z = P(x, y)$ محصور شده و تصویر V روی صفحه xy سطحی مانند D باشد که از بالا و پایین به منحنی‌های $y = N(x)$ و $y = M(x)$ محدود شده و از راست و چپ به خطوط $x = b$ و $x = a$ محدود شده، داریم:

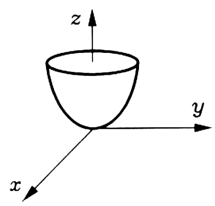
$$I = \int_{x=a}^{b} \int_{y=M(x)}^{N(x)} \int_{z=P(x,y)}^{Q(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

تغییر متغیر در انتگرال‌های سه‌گانه:

بدیهی است اگر بخواهیم از تغییر متغیرهای $\begin{cases} u = u(x, y, z) \\ v = v(x, y, z) \\ w = w(x, y, z) \end{cases}$ استفاده کنیم، ژاکوبین تغییر دستگاه مختصات از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

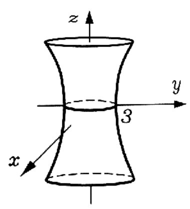
$$J = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}} \quad , \quad dx\, dy\, dz = |j|\, du\, dv\, dw$$

چند رویه معروف



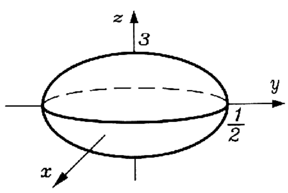
$z = x^2 + y^2$

سهمیگون دایروی



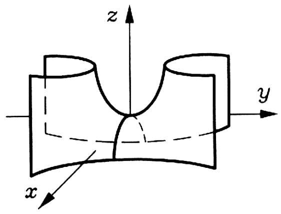
$x^2 + y^2 - z^2 = 9$

هذلولیگون یکپارچه



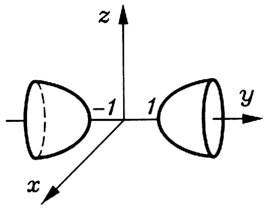
$4x^2 + 4y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$

بیضیگون



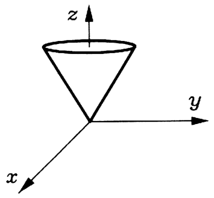
$-x^2+y^2=z$

سهمیگون هذلولوی (زین اسبی)



$-x^2+y^2-z^2=1$

هذلولیگون دوپارچه

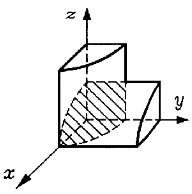


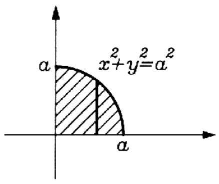
$z=\sqrt{x^2+y^2}$

مخروط

مثال : مطلوبست محاسبه حجم محدود شده به استوانه‌های $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$ که در یک هشتم اول دستگاه مختصات قرار دارد.

حل :





$$V=\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} 1\,dz\,dy\,dx=\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

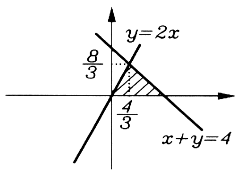
$$=\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx=\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{2a^3}{3}$$

مثال : انتگرال سه‌گانه‌ای بنویسید که حجم محدود شده به صفحات $z=-3$, $y=0$, $y=2x$, $x+y+z=1$ را نشان دهد:

حل : تصویر حجم مورد نظر روی صفحه xy چنین است:

(D نسبت به y نامنظم است)

(D نسبت به x منظم است)



$$\begin{cases}y=2x\\x+y=4\end{cases}\rightarrow\quad 3x=4\quad\rightarrow\quad x=\frac{4}{3}\quad\rightarrow\quad y=\frac{8}{3}$$

$$V=\int_{y=0}^{\frac{8}{3}}\int_{x=\frac{y}{2}}^{4-y}\int_{z=-3}^{1-x-y} dz\,dx\,dy$$

مثال : حجم محدود شده به صفحات $\begin{cases}2x+y-z=1\,,\,3\\x-y+2z=2\,,\,5\\x+y+3z=-1\,,\,4\end{cases}$ را بیابید.

حل : با استفاده از تغییر متغیرهای زیر:

$$\begin{cases}2x+y-z=u\\x-y+2z=v\\x+y+3z=w\end{cases}$$

داریم:

$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}}=\frac{1}{2(-5)-1(1)-1(2)}=-\frac{1}{13}$$

با این تغییر متغیرها رویه‌های محصور کننده ناحیه جدید شش صفحه زیرند:

$$\begin{cases} u=1 \;,\; 3\\ v=2 \;,\; 5\\ w=-1 \;,\; 4\end{cases}$$

که یک مکعب را نشان می‌دهد و حجم مورد نظر چنین است:

$$\text{حجم}=\iiint dx\,dy\,dz=\iiint\left|-\frac{1}{13}\right|du\,dv\,dw=\frac{1}{13}(2)(3)(5)$$

مثال : حجم محدود شده به رویه $(x-y)^2+(2y-z)^2+(x+z)^2=16$ را بیابید.

حل : با تغییر متغیرهای $\begin{cases} x-y=u\\ 2y-z=v\\ x+z=w\end{cases}$ رویه داده شده به کره $u^2+v^2+w^2=16$ تبدیل می‌شود. داریم:

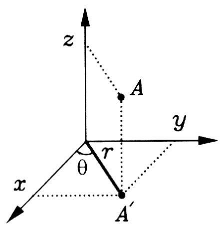
$$J=\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}}=\frac{1}{1(2)+1(1)+0}=\frac{1}{3}$$

حال می‌توان گفت:

$$\text{حجم مورد نظر}=\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 16}\left|\frac{1}{3}\right|du\,dv\,dw=\frac{1}{3}\,(\text{حجم کره})=\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}\pi(4)^3=\frac{256\pi}{9}$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

متغیرهای دستگاه مختصات استوانه‌ای و دکارتی به صورت مقابل به هم مربوط می‌شوند.



$$\begin{cases} x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}\quad,\quad\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2}\\ \theta=\operatorname{Arc\,tan}\left(\frac{y}{x}\right)\\ z=z\end{cases}$$

می‌توان نشان داد:

$$dx\,dy\,dz=r\,dr\,d\theta\,dz$$

دقت کنید همان‌طور که وجود جمله x^2+y^2 می‌تواند استفاده از مختصات استوانه‌ای را برای حل مناسب کند، وجود جمله $a^2x^2+b^2y^2$ می‌تواند استفاده از مختصات شبه استوانه‌ای زیر را برای حل مناسب کند.

$$\begin{cases} x=\frac{1}{a}r\cos\theta\\ y=\frac{1}{b}r\sin\theta\\ z=z\end{cases}\rightarrow\begin{cases} a^2x^2+b^2y^2=r^2\\ dx\,dy\,dz=\frac{1}{ab}r\,dr\,d\theta\,dz\end{cases}$$

توجه:در مختصات استوانه‌ای:

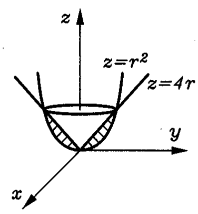
$r = a$ بیانگر استوانه‌ای که مرکز دایره هادی آن در مبدأ مختصات می‌باشد.

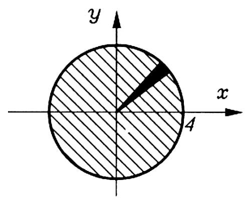
$z = kr$ مخروطی را نشان می‌دهد که رأس آن در مبدأ و محور تقارنش محور zها است.

$\theta = \alpha$ نیم صفحه‌ای گذرنده از محور zها را نشان می‌دهد که عمود برصفحه xy بوده و با محور x زاویه α می‌سازد.

مثال : حجم محدود شده به مخروط $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}$ و سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ را بیابید.

حل : با شروع نسبت به متغیر z داریم:





$$\left.\begin{array}{l} z = 4\sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad z = 4r \\ z = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad z = r^2 \end{array}\right\} \rightarrow \quad r^2 = 4r \quad \rightarrow \quad r = 0 \quad , \quad r = 4$$

با شروع نسبت به متغیر z داریم:

$$v = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{4} \int_{z=r^2}^{4r} r\, dz\, dr\, d\theta$$

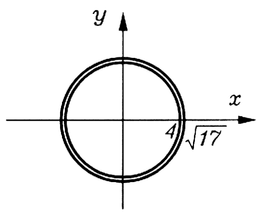
با شروع نسبت به متغیر r داریم:

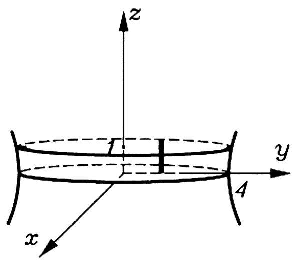
$$v = \int_{z=0}^{16} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=\frac{z}{4}}^{\sqrt{z}} r\, dr\, d\theta\, dz$$

مثال : حجم محدود شده به صفحات $z = 0$ و $z = 1$ و هذلولی‌گون $x^2 + y^2 - z^2 = 16$ را پیدا کنید.

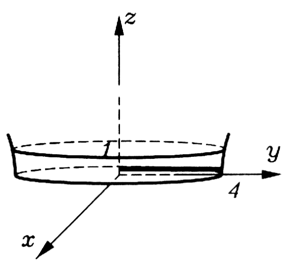
حل : اگر بخواهیم با z شروع کنیم چون حجم داده شده نسبت به محور z منظم نمی‌باشد . می‌نویسیم:

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{4} \int_{z=0}^{1} r\, dz\, dr\, d\theta + \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=4}^{r=\sqrt{17}} \int_{z=\sqrt{r^2-16}}^{1} r\, dz\, dr\, d\theta$$





شاید بهتر باشد با متغیر r شروع کرده و بنویسیم:



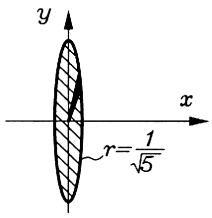
$$V = \int_{z=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{16+z^2}} r\, dr\, d\theta\, dz$$

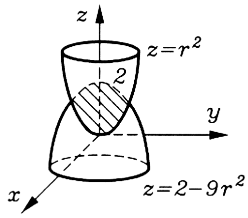
مثال : حجم محدود شده به سهمی گونه‌های $\begin{cases} z = 4x^2 + \dfrac{y^2}{9} \\ z = 2 - 36x^2 - y^2 \end{cases}$ را بیابید.

حل : با تغییر متغیرهای شبه استوانه‌ای زیر داریم:

$$\begin{cases} x = \dfrac{r}{2}\cos\theta \\ y = 3r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x^2 + \dfrac{y^2}{9} = r^2 \\ |j| = \left(\dfrac{1}{2}\right)(3)r \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 4x^2 + \dfrac{y^2}{9} \rightarrow z = r^2 \\ z = 2 - 36x^2 - y^2 \rightarrow z = 2 - 9r^2 \end{cases} \rightarrow r^2 = 2 - 9r^2 \rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



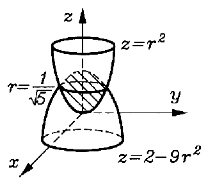


با شروع نسبت به z داریم:

$$V = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\frac{1}{\sqrt{5}}}\int_{z=r^2}^{z=2-9r^2} \frac{3}{2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

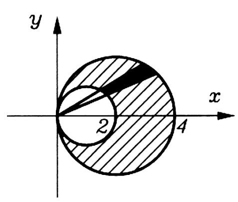
اگرچه خوب نیست ولی اگر بخواهیم با r شروع کنیم:

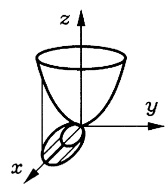
$$V = \int_{z=0}^{\frac{1}{5}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{z}} \frac{3}{2} r \, dr \, d\theta \, dz + \int_{z=\frac{1}{5}}^{2}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\sqrt{\frac{2-z}{9}}} \frac{3}{2} r \, dr \, d\theta \, dz$$



مثال : مطلوبست محاسبه $I = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dv$ که در آن V حجم محدود شده به استوانه‌های $x^2 + y^2 = 2x$ و $x^2 + y^2 = 4x$ می‌باشد که از پایین به صفحه $z = 0$ و از بالا به سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ محدود شده است.

حل :





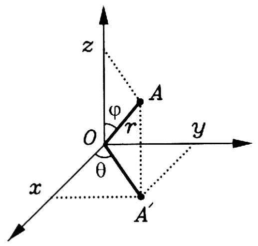
$$\begin{cases} x^2+y^2=2x \quad \rightarrow \quad r^2=2r\cos\theta \quad \rightarrow \quad r=2\cos\theta \\ x^2+y^2=4 \quad \rightarrow \quad r^2=4r\cos\theta \quad \rightarrow \quad r=4\cos\theta \\ z=x^2+y^2 \quad \rightarrow \quad z=r^2 \end{cases}$$

با استفاده از دستگاه مختصات استوانه‌ای داریم:

$$I=\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=2\cos\theta}^{4\cos\theta}\int_{z=0}^{r^2}\left(r^2+z^2\right)\left(r\,dz\,dr\,d\theta\right)$$

دستگاه مختصات کروی

متغیرهای دستگاه مختصات کروی و دکارتی به صورت مقابل به هم مربوط می‌شوند.



$$OA'=r\sin\varphi \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} x=OA'\cos\theta \\ y=OA'\sin\theta \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta \\ y=r\sin\varphi\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta=\mathrm{Arc}\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \varphi=\mathrm{Arc}\cos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases}$$

می‌توان نشان داد:

$$dx\,dy\,dz=r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

دقت کنید همان‌طوری‌که وجود جمله $x^2+y^2+z^2$ می‌تواند استفاده از مختصات کروی را برای حل مناسب کند، وجود جمله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ می‌تواند استفاده از مختصات شبه کروی زیر را برای حل مناسب کند.

$$\begin{cases} x=ar\sin\varphi\cos\theta \\ y=br\sin\varphi\sin\theta \\ z=cr\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=r^2 \\ dx\,dy\,dz=abc\,r^2\sin\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi \end{cases}$$

توجه: در مختصات کروی

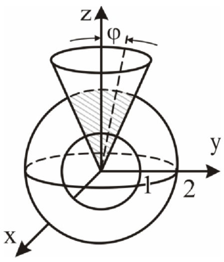
$r=a$ بیانگر کره‌ای است که مرکزش در مبدأ مختصات است.

$\varphi=\varphi_0$ مخروطی را نشان می‌دهد که رأس آن در مبدأ و محور تقارنش محور zها است.

$\theta=\theta_0$ نیم‌صفحه‌ای عمود بر صفحه xy را نشان می‌دهد که با محور x زاویه θ_0 می‌سازد و از یک طرف به محور zها محدود می‌باشد.

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \iiint_V \dfrac{dx\,dy\,dz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ که در آن V ناحیه محدود شده به کره‌های $x^2+y^2+z^2=1\,,\,4$ و مخروط $\sqrt{3}\,z=\sqrt{x^2+y^2}$ می‌باشد.

حل : در مختصات کروی داریم:



$$x^2+y^2+z^2=1\,,\,4 \quad\to\quad r^2=1\,,\,4\,,\,r=1\,,\,2$$

$$\sqrt{3}\,z=\sqrt{x^2+y^2} \quad\to\quad \sqrt{3}\,r\cos\phi=\sqrt{r^2\sin^2\phi}$$

$$\sqrt{3}\,r\cos\phi=r\sin\phi \quad\to\quad \tan\phi=\sqrt{3} \quad\to\quad \phi=\frac{\pi}{3}$$

حال می‌توان گفت:

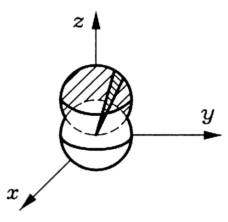
$$I=\int_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{3}}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=1}^{2}\frac{r^2\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi}{\left(r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I=\iiint_V z^2\,dv$ که در آن V ناحیه محدود شده به بالای کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ و پایین کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2z$ می‌باشد.

حل : از تقاطع داریم :

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2=1 \quad\to\quad r^2=1 \quad\to\quad r=1 \\ x^2+y^2+z^2=2z \quad\to\quad r^2=2r\cos\phi \quad\to\quad r=2\cos\phi \end{array}\right\} \to\; 2\cos\phi=1 \;\to\; \phi=\frac{\pi}{3}2\cos\phi=1 \;\to\; \phi=\frac{\pi}{3}$$

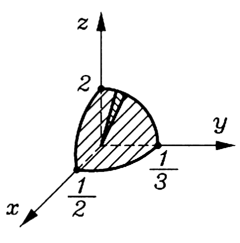
داریم:



$$I=\int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2\cos\phi}\left(r\cos\phi\right)^2\left(r^2\sin\phi\,dr\,d\theta\,d\phi\right)$$

مثال : مطلوبست محاسبه‌ی $I=\iiint_V x\,dx\,dy\,dz$ که در آن V قسمتی از ناحیه داخل بیضی‌گون $4x^2+9y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$ می‌باشد که در یک هشتم اول دستگاه مختصات واقع شده است.

حل :



با استفاده از تغییر متغیرهای زیر داریم (شبه کروی):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} r \sin\phi \cos\theta \\ y = \frac{1}{3} r \sin\phi \sin\theta \\ z = 2 r \cos\phi \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 4x^2 + 9y^2 + \frac{z^2}{4} = r^2 \\ dx\, dy\, dz = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)(2)\, r^2 \sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi \end{array}$$

لذا بدست می‌آوریم :

$$I = \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{1} \left(\frac{1}{2} r \sin\phi \cos\theta\right)\left(\frac{1}{3} r^2 \sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi\right)$$

قضیه دیورژانس

فرض کنید S سطح یک رویه فضایی بسته باشد که حجم V را به خود محصور کرده است و $\vec{n}$ برداریکه عمود به سمت خارج سطح S در هر نقطه از آن باشد. چنانچه میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ و $\operatorname{div}\vec{F}$ در تمام سطح S و حجم V توابعی پیوسته باشند داریم:

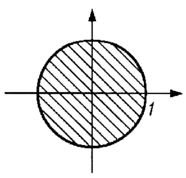
$$\oiint_S \left(\vec{F} . \vec{n}\right) ds = \iiint_V \left(\vec{\nabla} . \vec{F}\right) dv$$

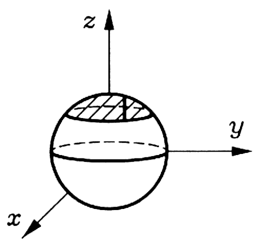
$$\oiint_S P\, dy\, dz + Q\, dx\, dz + R\, dx\, dy = \iiint_V \left(\vec{\nabla} . \vec{F}\right) dv \qquad \text{(فرمول استراگرودسکی)}$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \iint_S \left(\vec{F} . \vec{n}\right) ds$ که در آن $\vec{F} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + z^3 x\, \vec{j} + \left(2z + y^2\right)\vec{k}$ بوده و S سطح بسته‌ای است که از بالا به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ و از پایین به صفحه $z = 1$ محدود شده است.

حل : داریم:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla} . \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x + y^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(z^3 x\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(2z + y^2\right) = 1 + 0 + 2 = 3$$





حال طبق قضیه دیورژانس داریم:

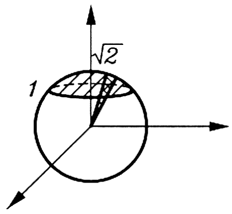
$$I = \iiint_V \left(\operatorname{div}\vec{F}\right) dv = \iiint_V 3\, dv$$

در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$\begin{cases} z^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ z = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad r^2 + z^2 = 2 \quad \rightarrow \quad r = 1$$

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=1}^{\sqrt{2-r^2}} 3\left(r\, dz\, dr\, d\theta \right)$$

در مختصات کروی داریم:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 & \to \quad r = \sqrt{2} \\ z = 1 & \to \quad r \cos\phi = 1 \end{cases} \quad \to \quad \cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \to \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=\frac{1}{\cos\phi}}^{\sqrt{2}} 3\left(r^2 \sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi \right)$$

مثال : چنانچه S سطح بسته‌ای باشد که به سهمی‌گون $x = 4y^2 + 9z^2$ و صفحه $x = 1$ محدود شده است مطلوبست محاسبه:

$$I = \iint_S 4xy^2\, dy\, dz + 3z^3\, dx\, dy$$

حل : مطابق قضیه استراگرواسکی داریم:

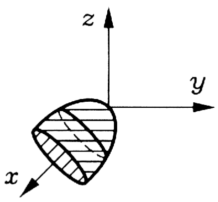
$$\vec{F} = \left(4xy^2 , 0 , 3z^3 \right)$$

$$\vec{\nabla} . \vec{F} = 4y^2 + 0 + 9z^2$$

طبق قضیه استراگرودسکی داریم:

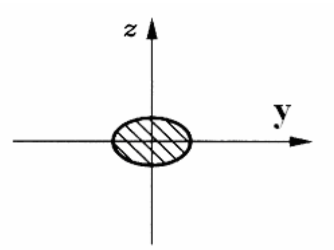
$$I = \iiint_V \left(4y^2 + 9z^2 \right) dv$$

با استفاده از تغییر متغیرهای زیر داریم (شبه استوانه‌ای)



$$\begin{cases} x = x \\ y = \frac{1}{2} r \cos\theta \\ z = \frac{1}{3} r \sin\theta \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} 4y^2 + 9z^2 = r^2 \\ dx\, dy\, dz = \frac{1}{6} r\, dx\, dr\, d\theta \end{cases}$$

به‌دست می‌آید:



$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{x=r^2}^{1} \left(r^2 \right) \left(\frac{1}{6} r\, dx\, dr\, d\theta \right)$$

مثال : فرض کنید S یک سطح بسته فضایی باشد که حجم V را به خود محدود کرده است و $\vec{n}$ برداریکه عمود به سمت خارج سطح S در هر نقطه از آن باشد. چنانچه $\phi(x , y , z)$ تابعی همساز باشد و $\frac{d\phi}{dn}$ مبین مشتق سویی تابع ϕ در جهت $\vec{n}$ باشد و نیز $\vec{F}$ یک تابع برداری دلخواه باشد حاصل انتگرال‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $I = \oiint_S \frac{d\phi}{dn} ds$

حل : از تعریف مشتق سویی:

$$I = \oiint_S \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n}\right) ds$$

از قضیه دیورژانس:

$$I = \iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\phi\right) dv$$

از تعریف لاپلاسین:

$$I = \iiint_V \left(\nabla^2 \phi\right) dv$$

از تعریف تابع همساز:

$$I = \iiint_V (0)\, dv = 0$$

ب) $I = \oiint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, ds$

حل : مطابق قضیه دیورژانس داریم:

$$I = \iiint_V \left(\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)\right) dv$$

از آن‌جا که دیورژانس کرل هر تابع برداری صفر است پس $I = 0$.

قضیه استوکس

فرض کنید S یک سطح باز لبه‌دار باشد که منحنی بسته C لبهٔ آن را تشکیل داده است و $\vec{n}$ برداریکه عمود به سمت خارج سطح S در هر نقطه از آن می‌باشد. چنانچه میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j} + R\,\vec{k}$ و $\text{curL}\,\vec{F}$ در تمام سطح S و منحنی C توابعی پیوسته باشند داریم:

$$\oint_{c^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{یعنی} \quad \oint_{c^+} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n}\, ds$$

مثال : مطلوبست محاسبه $I = \oint 2xe^z\, dx + 2yz\, dy + \left(x^2 e^z + y^2\right) dz$ که در آن c منحنی است که از تقاطع بیضی گون $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ و صفحه $2x + y + z = 0$ حاصل می‌گردد.

حل : داریم:

$$\vec{F} = \left(2xe^z, 2yz, x^2 e^z + y^2\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xe^{z} & 2yz & x^2e^{z}+y^2\end{vmatrix}=\vec{i}\left(2y-2y\right)-\vec{j}\left(2xe^{z}-2xe^{z}\right)+\vec{k}\left(0-0\right)=\vec{0}$$

حال طبق قضیه استوکس می‌توان نوشت:

$$I=\iint_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right).\vec{n}\,ds=0$$

مثال : مطلوبست محاسبه:

$$I=\iint_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right).\vec{n}\,ds$$

که در آن s قسمتی از سطح کره $x^2+y^2+z^2=1$ می‌باشد که در بالای صفحه $z=\frac{1}{2}$ واقع شده و $\vec{n}$ بردار یکه عمود به سمت خارج سطح s در هر نقطه از آن است و $\vec{F}=\left(x^2z+y\right)\vec{i}+xy\vec{j}+\left(z^2-x\right)\vec{k}$ می‌باشد.

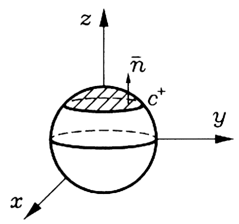
حل : مطابق قضیه استوکس داریم:

$$I=\oint_c\vec{F}.d\vec{r}=\oint_c\left(x^2z+y\right)dx+xy\,dy+\left(z^2-x\right)dz$$

روی منحنی c داریم:

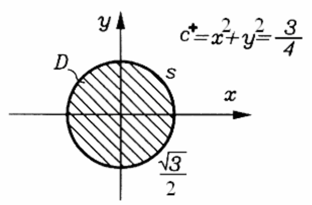
$$\begin{cases}z=\dfrac{1}{2}\ \rightarrow\ dz=0\\ x^2+y^2=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

به‌دست می‌آید:



$$I=\oint_C\left(\frac{x^2}{2}+y\right)dx+x\,y\,dy$$

طبق قضیه گرین : $I=\iint_D\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(xy\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^2}{2}+y\right)\right\}dx\,dy$



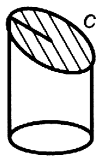
$$=\iint_D ydxdy-\iint 1dxdy=0-(D\ \text{مساحت ناحیه})=-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{-3\pi}{4}$$

بدیهی است:

$$\iint_D y\,dx\,dy=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta=0$$

مثال : اگر C منحنی حاصل از تقاطع استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $2x + 2y + z = 1$ باشد و $\vec{F} = z\,\vec{i} + \left(x^2 - y^2\right)\vec{j} + \left(xy + z^2\right)\vec{k}$ مطلوبست حاصل $I = \oint_C \vec{F}\,.\,d\vec{r}$.

حل : داریم:



$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x^2 - y^2 & xy + z^2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(x - 0) - \vec{j}\,(y - 1) + \vec{k}\,(2x - 0)$$

اگر بخواهیم از قضیه استوکس استفاده کنیم باید سطحی را در نظر بگیریم که لبه پایین منحنی C باشد و طبیعتاً بهترین انتخاب همان سطح هاشور خورده فوق است که روی صفحه $2x + 2y + z = 1$ واقع است. زیرا:

$$\vec{n} = \frac{2\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}}{3}$$

و البته تصویر این سطح روی صفحه xy دایره $D: x^2 + y^2 = 1$ می‌باشد و می‌دانیم:

$$ds = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\;dx\,dy = \sqrt{1 + (-2)^2 + (-2)^2}\;dx = 3\,dx\,dy$$

مطابق قضیه استوکس داریم:

$$I = \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right).\,\vec{n}\;ds = \iint_S \frac{2x - 2(y - 1) + 2x}{3}\;ds$$

تبدیل به انتگرال‌های دوگانه معمولی:

$$\text{تبدیل به انتگرال دوگانه معمولی} = \iint_{D: x^2 + y^2 \le 1} \frac{4x - 2y + 2}{3}\;3\,dx\,dy$$

بنا به تقارن :

$$\iint_D x\,dxdy = \iint_D y\,dxdy = 0$$

بنابر این بدست می آید :

$$I = (\text{دو برابر مساحت ناحیه}\,D) = 2\pi$$